Das Integral $\mathcal{T} e^{(x+i\omega)t} := \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} e^{(x+i\omega)\tau} d\tau$.[1)]

I. Es sei die Funktion $\mathrm{ei}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathrm{ei}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{y^2} dy\,. \tag{1}$$

Dann gilt für $\omega \in \mathbb{R}$ und $t > 0$

Satz 1:

$$F(\omega) : = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos \omega x dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}}\,, \tag{2}$$

$$G(\omega) : = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \sin \omega x dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \mathrm{ei}\big(\tfrac{\omega}{2}\big)\,, \tag{3}$$

und

$$H(\omega) := F(\omega) + iG(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} e^{i\omega x} dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \big[1 + i\,\mathrm{ei}\big(\tfrac{\omega}{2}\big)\big]\,. \tag{4}$$

Beweis für (2). Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz des Integrales

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \tfrac{\partial}{\partial\omega}\big(\cos \omega x\big) dx = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty x e^{-x^2} \sin \omega x dx$$

auf $\mathbb{R}$ ist

$$F'(\omega) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty x e^{-x^2} \sin \omega x dx\,.$$

Durch partielle Integration mit den Setzungen $u' = -2xe^{-x^2}, v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \omega x$ und $u = e^{-x^2}, v' = \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \cos \omega x$ folgt

$$F'(\omega) = \Big[e^{-x^2} \frac{\sin \omega x}{\sqrt{\pi}}\Big]_0^\infty - \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos \omega x dx = -\frac{\omega}{2} F(\omega)\,.$$

[1)] Die Bedeutung des linearen Operators $\mathcal{T}: C^0([0,\infty[) \to C^0([0,\infty[)$ besteht in folgendem Zusammenhang mit der durch den linearen Operator $\mathcal{L}$ symbolisierten Laplace-Transformation: Ist $\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-st} dt = F(s)$ und $\hat{f}(t) = \mathcal{T}f(t)$, so ist $\mathcal{T}\mathcal{L}f(t) = F(\sqrt{s})$ bzw. $\mathcal{L}\hat{f}(t) = F(\sqrt{s})$.

Diese homogene lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$F(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

mit einer willkürlichen Konstanten $C \in \mathbb{R}$, für welche dann $C = 1$ wegen

$$F(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1$$

und somit

$$F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

gelten muß.

Beweis für (2). Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz des Integrales

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\partial}{\partial\omega}\big(\sin\omega x\big) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty xe^{-x^2} \cos\omega x dx$$

auf $\mathbb{R}$ ist

$$G'(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty xe^{-x^2} \cos\omega x dx\,.$$

Durch partielle Integration mit den Setzungen $u = 2xe^{-x^2}, v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\omega x$ und $u = -e^{-x^2}, v' = -\frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \sin\omega x$ folgt

$$G'(\omega) = \Big[-e^{-x^2} \frac{\cos\omega x}{\sqrt{\pi}}\Big]_0^\infty - \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\omega x dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{\omega}{2} G(\omega)\,.$$

Diese lineare jetzt inhomogene Differentialgleichung hat die homogene Lösung $G_h(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$ mit einer willkürlichen Konstanten C; zur Konstruktion einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung dient (mit einer zu bestimmenden Funktion $c(\omega)$)) der Ansatz $G_p(\omega) = c(\omega)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$; er liefert

$$G_p'(\omega) + \frac{\omega}{2} G_p(\omega) = c'(\omega)e^{-\frac{\omega^2}{4}} - c(\omega)\frac{\omega}{2}e^{-\frac{\omega^2}{4}} + c(\omega)\frac{\omega}{2}e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Daraus folgt

$$c'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\omega^2}{4}}$$

und damit

$$c(\omega) = \int_0^\omega c'(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\omega e^{\frac{y^2}{4}} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\omega}{2}} e^{z^2} dz = \mathrm{ei}\big(\tfrac{\omega}{2}\big)\,.$$

Somit ist

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \big[C + \mathrm{ei}\big(\tfrac{\omega}{2}\big)\big]$$

und wegen $G(0) = 0$

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \mathrm{ei}\big(\tfrac{\omega}{2}\big)\,.$$

II. Sei weiter für $(x,\omega)\in\mathbb{R}^2$

$$\widetilde{F}(x,\omega) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-z^2}\cos\omega z dz\,, \tag{5}$$

$$\widetilde{G}(x,\omega) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-z^2}\sin\omega z dz\,. \tag{6}$$

sowie durch Zusammenfassen

$$\widetilde{H}(x,\omega) := \widetilde{F}(x,\omega) + i\widetilde{G}(x,\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-z^2}e^{i\omega z}dz\,. \tag{7}$$

Satz 2: Es gilt für $(x,\omega)\in\mathbb{R}^2$

$$\widetilde{F}(x,\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[\operatorname{erfc}(x) - e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\sin 2xydy\right]. \tag{8}$$

$$\widetilde{G}(x,\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\cos 2xydy\,, \tag{9}$$

$$\widetilde{H}(x,\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[\operatorname{erfc}(x) + ie^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}e^{2ixy}dy\right]. \tag{10}$$

Beweis für (8)*:* Es gilt

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\omega} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty ze^{-z^2}\sin\omega zdz\,;$$

daraus wird durch partielle Integration mit den Setzungen $u'(z) = -2ze^{-z^2}$, $v(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\omega z$ sowie $u(z) = e^{-z^2}, v'(z) = \frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\cos\omega z$

$$\frac{\partial\widetilde{F}(x,\omega)}{\partial\omega} = \left[e^{-z^2}\frac{\sin\omega z}{\sqrt{\pi}}\right]_x^\infty - \frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-z^2}\cos\omega zdz = -e^{-x^2}\frac{\sin\omega x}{\sqrt{\pi}} - \frac{\omega}{2}\widetilde{F}(x,\omega)\,,$$

also

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\omega} + \frac{\omega}{2}\widetilde{F} = -e^{-x^2}\frac{\sin\omega x}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Mit dem partikulären Integral

$$e^{-\frac{\omega^2}{4}} - e^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\omega e^{\frac{z^2}{4}}\sin zxdz = -e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\sin 2xydy$$

wird

$$\widetilde{F}(x,\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[c(x) - e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\sin 2yx dy\right].$$

Dabei ist $c(0) = 1$ wegen $\widetilde{F}(0,\omega) = F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ für $\omega \in \mathbb{R}$. Durch Bildung der partiellen Ableitung von (5) nach der Variablen x folgt einerseits

$$\frac{\partial\widetilde{F}(x,\omega)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^{\infty} e^{z^2}\cos\omega z dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\cos\omega x\,,$$

und unter Berücksichtigung von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} ye^{y^2}\cos 2xy dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{\frac{\omega^2}{4}}\cos\omega x - 1\right) + \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\sin 2xy dy$$

andererseits

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{F}(x,\omega)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[c(x) - e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\sin 2yx dy\right] \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4}}\Bigg[c'(x) + 2xe^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} e^{y^2}\sin 2xy dy \\
&\qquad\qquad - 2e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} ye^{y^2}\cos 2xy dy\Bigg] \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[c'(x) + e^{-x^2}\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{\frac{\omega^2}{4}}\cos\omega x\right)\right] \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[c'(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\cos\omega x = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\cos\omega x\,;
\end{aligned}$$

daraus folgt $c'(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ und

$$c(x) = c(0) + \int_0^x c'(\xi)d\xi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\xi^2}d\xi = 1 - \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erfc}(x)\,.$$

Somit ist (8) gezeigt. Zur Berechnung des Integrales (9) ist zunächst

$$\frac{\partial\widetilde{G}(x,\omega)}{\partial\omega} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^{\infty} ze^{-z^2}\cos\omega z dz$$

und analog durch partielle Integration mit den Setzungen $u' = 2ze^{-z^2}, v = \frac{\cos\omega z}{\sqrt{\pi}}$ und $u = -e^{-z^2}, v' = -\frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\sin\omega z$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial\omega} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^{\infty} ze^{-z^2}\cos\omega z dz = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-z^2}\cos\omega z\right]_x^{\infty} - \frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^{\infty} e^{-z^2}\sin\omega z dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\cos\omega x - \frac{\omega}{2}\widetilde{G}\,,
\end{aligned}$$

also $\widetilde{G}(x,\omega)$ Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial\omega}+\frac{\omega}{2}\widetilde{G}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\cos\omega x\,.$$

Mit dem partikulären Integral

$$e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\omega}e^{\frac{z^2}{4}}\cos zxdz=e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}e^{y^2}\cos 2xydy$$

wird

$$\widetilde{G}(x,\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[\tilde{c}(x)+e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}e^{y^2}\cos 2xydy\right],$$

wobei $\widetilde{G}(0,\omega)=G(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\mathrm{ei}(\frac{\omega}{2})$ für $\omega\in\mathbb{R}$. Partielle Differentiation führt zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{G}(x,\omega)}{\partial x}&=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\Bigg[\tilde{c}'(x)-2xe^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}e^{y^2}\cos 2xydy\\&\qquad\qquad-2e^{-x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}ye^{y^2}\sin 2xydy\Bigg]\\&=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left(\tilde{c}'(x)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}e^{\frac{\omega^2}{4}}\sin\omega x\right);\end{aligned}$$

dabei wurde von

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}ye^{y^2}\sin 2xydy&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[e^{y^2}\sin 2xy\Big]_0^{\frac{\omega}{2}}-x\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}e^{y^2}\cos 2xydy\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{\omega^2}{4}}\sin\omega x-x\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}e^{y^2}\cos 2xydy\end{aligned}$$

Gebrauch gemacht, sodaß für

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{G}(x,\omega)}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^{\infty}e^{-z^2}\sin\omega zdz=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sin\omega x\\&=-e^{-\frac{\omega^2}{4}}\tilde{c}'(x)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sin\omega x\,,\end{aligned}$$

also $\tilde{c}'(x)=0$ und $\tilde{c}(x)=\tilde{c}(0)$ folgt. Wegen

$$\widetilde{G}(0,\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\left[\tilde{c}(0)+\mathrm{ei}(\tfrac{\omega}{2})\right]=G(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\mathrm{ei}(\tfrac{\omega}{2})$$

ist $\tilde{c}(0)=0$, woraus schließlich die Behauptung (9) folgt. Die Zusammenfassung $\widetilde{H}:=\widetilde{F}+i\widetilde{G}$ ergibt schließlich (10).

Definition: Seien die reellen Funktionen $\mathrm{erf}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $\mathrm{erfc}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

gegeben durch

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-y^2} dy\,, \quad \operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-y^2} dy\,. \tag{11}$$

Dann sei für $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{erf}(s) := \operatorname{erf}(x + i\omega), \quad \operatorname{erfc}(s) := \operatorname{erfc}(x + i\omega)\,, \tag{12}$$

symbolisch

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x+i\omega} e^{-y^2} dy\,, \quad \operatorname{erfc}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x+i\omega}^\infty e^{-y^2} dy\,. \tag{13}$$

Satz 3: Es gilt für $s \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{erfc}(s) = e^{(\Im s)^2} \widetilde{H}(\Re s, -2\Im s)\,, \tag{14}$$

im Detail

$$\operatorname{erf}(s) = \operatorname{erf}(\Re s) + i e^{-(\Re s)^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\Im s} e^{y^2} e^{-2ixy} dy\,, \tag{15}$$

$$\operatorname{erfc}(s) = \operatorname{erfc}(\Re s) - i e^{-(\Re s)^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\Im s} e^{y^2} e^{-2ixy} dy\,. \tag{16}$$

Beweis für (14)*:* Für $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{\omega^2} \widetilde{H}(x, -2\omega) = e^{\omega^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-z^2} e^{-2i\omega z} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-(z+i\omega)^2} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x+i\omega}^\infty e^{-y^2} dy = \operatorname{erfc}(x + i\omega)\,.$$

Für (16) ist die Darstellung (10) dienlich,

$$\operatorname{erfc}(x + i\omega) = e^{\omega^2} \widetilde{H}(x, -2\omega) = \operatorname{erfc}(x) + i e^{-x^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{-\omega} e^{-z^2} e^{2ixz} dz$$

$$= \operatorname{erfc}(x) - i e^{-x^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\omega} e^{-z^2} e^{-2i\omega z} dz\,,$$

damit wird (15) bestätigt durch

$$\operatorname{erf}(x + i\omega) = 1 - \operatorname{erfc}(x + i\omega) = \operatorname{erf}(x) + i e^{-x^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\omega} e^{-z^2} e^{-2ixz} dz\,.$$

Folgerung 1: Durch Real- und Imaginärteilbildung ergibt sich

$$\Re\,\mathrm{erfc}(s) = e^{(\Im s)^2}\widetilde{F}(x,2\omega) = \mathrm{erfc}(\Re s) - e^{-(\Re s)^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\Im s} e^{y^2}\sin(2y\Re s)dy, \qquad (17)$$

$$\Im\,\mathrm{erfc}(s) = -e^{(\Im s)^2}\widetilde{G}(x,2\omega) = -e^{-(\Re s)^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\Im s} e^{y^2}\cos(2y\Re s)dy. \qquad (18)$$

Für $s = i\omega, \omega \in \mathbb{R}$ bedeutet dies

$$\Re\,\mathrm{erfc}(i\omega) = e^{\omega^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}\cos 2\omega z dz = e^{\omega^2}F(2\omega) = 1\,, \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}\Im\,\mathrm{erfc}(i\omega) &= -e^{\omega^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}\sin 2\omega z dz = -e^{\omega^2}G(2\omega) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\omega} e^{z^2}dz \\ &= -\mathrm{ei}(\omega)\,, \qquad (20)\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{erf}(i\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{i\omega} e^{-z^2}dz = i\mathrm{ei}(\omega), \quad \mathrm{erfc}(i\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{i\omega}^{\infty} e^{-z^2}dz = 1 - i\mathrm{ei}(\omega)\,. \qquad (21)$$

Folgerung 2: Es gilt für $s \in \mathbb{C}$

$$\left|\mathrm{erfc}(s)\right| \le e^{(\Im s)^2}\left|\widetilde{H}(\Re s, -2\Im s)\right| \le e^{(\Im s)^2}\,\mathrm{erfc}(\Re s) \qquad (22)$$

und

$$\left|e^{s^2}\,\mathrm{erfc}(s)\right| \le e^{(\Re s)^2}\left|\widetilde{H}(\Re s, -2\Im s)\right| \le e^{(\Re s)^2}\,\mathrm{erfc}(\Re s)\,. \qquad (23)$$

III. Es sei für $(x,\omega) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$

$$\widehat{F}(x,\omega,t) := \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} e^{x\tau}\cos\omega\tau d\tau\,, \qquad (24)$$

$$\widehat{G}(x,\omega,t) := \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} e^{x\tau}\sin\omega\tau d\tau \qquad (25)$$

und für $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{T}e^{st} := \widehat{H}(x,\omega,t) = \widehat{F}(x,\omega,t) + i\widehat{G}(x,\omega,t) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} e^{s\tau}d\tau\,. \qquad (26)$$

Satz 4: Für $(x,\omega) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ ist

$$\widehat{F}(x,\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^{\omega^2 t}\Re\big[s e^{s^2 t}\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big] \qquad (27)$$

$$\widehat{G}(x,\omega,t) = e^{\omega^2 t}\Im\big[s e^{s^2 t}\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big] \qquad (28)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{T}e^{st} = \widehat{H}(x,\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + s\,e^{s^2 t}\operatorname{erfc}(-s\sqrt{t})\,. \tag{29}$$

Beweis für (27)*:* Es gilt

$$\widehat{F}(x,\omega,t) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \int\limits_0^\infty \tau e^{-(\frac{\tau}{2\sqrt{t}} - x\sqrt{t})^2} \cos\omega\tau d\tau$$

und mit der Substitution $z = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} - x\sqrt{t}$

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(x,\omega,t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty (z + x\sqrt{t}) e^{-z^2} \cos[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\
&= \widehat{F}_1(x,\omega,t) + \widehat{F}_2(x,\omega,t)\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_1(x,\omega,t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty z e^{-z^2} \cos[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \Big[\big[-e^{-z^2} \cos[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] \big]_{-x\sqrt{t}}^\infty \\
&\qquad - 2\omega\sqrt{t} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \sin[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \Big[e^{-x^2 t} - 2\omega\sqrt{t} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \sin[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \omega e^{x^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \sin[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \omega e^{x^2 t} \big[\cos 2\omega x t \widetilde{G}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) + \sin 2\omega x t \widetilde{F}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) \big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \omega e^{x^2 t} \Im\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{2i\omega x t} \big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \omega e^{\omega^2 t} \Im\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{(x+i\omega)^2 t} \big]
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2(x,\omega,t) &= x e^{x^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \cos[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\
&= x e^{x^2 t} \big[\cos 2\omega x t \widetilde{F}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) - \sin 2\omega x t \widetilde{G}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) \big] \\
&= x e^{x^2 t} \Re\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{2i\omega x t} \big] \\
&= x e^{\omega^2 t} \Re\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{(x+i\omega)^2 t} \big]\,.
\end{aligned}$$

Mit $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$ wird (27) zu

$$\begin{aligned}\widehat{F}(x,\omega,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^{x^2 t}\Re\big[(x+i\omega)\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})e^{2i\omega x t}\big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^{\omega^2 t}\Re\big(s e^{s^2 t}\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big)\,.\end{aligned}$$

Beweis für (28)*:*. Analog wird aus (25) mit Hilfe der Substitution $z = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} - x\sqrt{t}$

$$\begin{aligned}\widehat{G}(x,\omega,t) &= \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \int\limits_0^\infty \tau e^{-(\frac{\tau}{2\sqrt{t}} - x\sqrt{t})^2} \sin \omega\tau d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{x^2 t} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty (z + x\sqrt{t}) e^{-z^2} \sin[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\ &= \widehat{G}_1(x,\omega,t) + \widehat{G}_2(x,\omega,t)\,.\end{aligned}$$

Es ergibt sich für

$$\begin{aligned}\widehat{G}_1(x,\omega,t) &= e^{x^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \Bigg[\big[-e^{-z^2} \sin[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})]\big]_{-x\sqrt{t}}^\infty \\ &\qquad\qquad + 2\omega\sqrt{t} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \cos[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \Bigg] \\ &= e^{x^2 t}\omega \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \cos[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\ &= e^{x^2 t}\omega \Bigg[\cos 2\omega x t \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \cos 2z\omega\sqrt{t} dz \\ &\qquad\qquad - \sin 2\omega x t \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \sin 2z\omega\sqrt{t} dz \Bigg] \\ &= \omega e^{x^2 t}\big[\cos 2\omega x t \widetilde{F}(-x\sqrt{t}, 2\omega x t) - \sin 2\omega x t \widetilde{G}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big] \\ &= \omega e^{x^2 t}\Re\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{2i\omega x t}\big] \\ &= \omega e^{\omega^2 t}\Re\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{(x+i\omega)^2 t}\big]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widehat{G}_2(x,\omega,t) &= x e^{x^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} \sin[2\omega\sqrt{t}(z + x\sqrt{t})] dz \\ &= x e^{x^2 t}\big[\cos 2\omega x t \widetilde{G}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) + \sin 2\omega x t \widetilde{F}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big] \\ &= x e^{x^2 t}\Im\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{2i\omega x t}\big] \\ &= x e^{\omega^2 t}\Im\big[\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t}) e^{(x+i\omega)^2 t}\big]\,.\end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt dies

$$\widehat{G}(x,\omega,t) = e^{\omega^2 t}\Im\Big[s\,e^{s^2 t}\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\Big]\,.$$

Beweis für (29)*:* Für $s = x + i\omega$ ist

$$\begin{aligned}\mathcal{T}e^{st} &= \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}e^{s\tau}d\tau = \widehat{F}(x,\omega,t) + i\widehat{G}(x,\omega,t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^{\omega^2 t}\big[\Re\big(s\,e^{s^2 t}\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big) + i\Im\big(s\,e^{s^2 t}\widetilde{H}(-x\sqrt{t}, 2\omega\sqrt{t})\big)\big]\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + s\,e^{s^2 t}\operatorname{erfc}(-s\sqrt{t})\,,\end{aligned}$$

worin (14) verwendet wurde.

IV. Bemerkenswert ist der folgende Zusammenhang des Integraloperators $\mathcal{T}$ mit der Faltung bezüglich der Laplace-Transformation:

Satz 5. Sind $f(t)$ und $g(t)$ reelle Funktionen, die nicht stärker als exponentiell anwachsen, so gilt das gleiche für das Faltungsintegral

$$h(t) = [f * g](t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,,$$

insbesondere ist

$$[(\mathcal{T}f) * (\mathcal{T}g)](t) = [\mathcal{T}(f * g)](t)\,. \tag{30}$$

Beweis: Es bezeichne $F(s) = \mathcal{L}f(t)$, $G(s) = \mathcal{L}g(t)$ und $H(s) = \mathcal{L}h(t)$ mit $h(t) = [f * g](t)$. Dann ist $\mathcal{L}[\mathcal{T}f](t) = F(\sqrt{s})$, $\mathcal{L}[\mathcal{T}g](t) = G(\sqrt{s})$ und

$$H(\sqrt{s}) = \mathcal{L}[\mathcal{T}h](t) = \mathcal{L}[\mathcal{T}(f * g)](t)$$

und mit

$$H(\sqrt{s}) = F(\sqrt{s})G(\sqrt{s})$$

weiter

$$H(\sqrt{s}) = \mathcal{L}([\mathcal{T}f] * [\mathcal{T}g])\,,$$

also

$$\mathcal{L}([\mathcal{T}f] * [\mathcal{T}g]) = \mathcal{L}[\mathcal{T}(f * g)]$$

und daher

$$\mathcal{T}(f * g) = (\mathcal{T}f) * (\mathcal{T}g)\,,$$

da die Laplace-Transformation und ebenso die Transformation $\mathcal{T}$ injektiv ist.

V. Schließlich sei für $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$ und $t \geq 0$ das Integral

$$\int_0^t \mathcal{T}e^{st'}dt = \int_0^t \left(\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4x}}e^{s\tau}d\tau\right)dx \tag{30}$$

untersucht.

Durch Einsetzen aus (29) folgt

$$\int_0^t \mathcal{T} e^{st'}\, dt = \int_0^t \Big[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} + s\, e^{s^2\tau}\, \mathrm{erfc}(-s\sqrt{\tau}\,)\Big] d\tau$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + s \int_0^t e^{s^2\tau}\, \mathrm{erfc}(-s\sqrt{\tau}\,) d\tau$$

und weiter durch partielle Integration mit $u(\tau) = \mathrm{erfc}(-s\sqrt{\tau}\,), v'(\tau) = e^{s^2\tau}$ bzw. $v(\tau) = \frac{1}{s^2} e^{s^2\tau}, u'(\tau) = \frac{s}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-s^2\tau}$

$$\int_0^t \mathcal{T} e^{st'}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + s\Bigg[\big[\tfrac{1}{s^2} e^{s^2\tau}\, \mathrm{erfc}(-s\sqrt{\tau})\big]_0^t - \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\Bigg]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + \frac{1}{s}\Big[e^{s^2 t}\, \mathrm{erfc}(-s\sqrt{t}\,) - 1\Big]$$

$$= \tfrac{1}{s}\big[e^{s^2 t}\, \mathrm{erfc}(-s\sqrt{t}\,) - 1\big]\,. \tag{31}$$