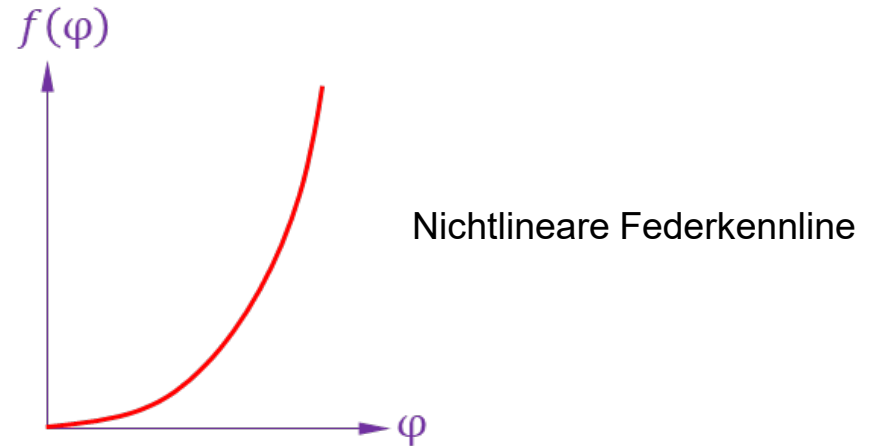
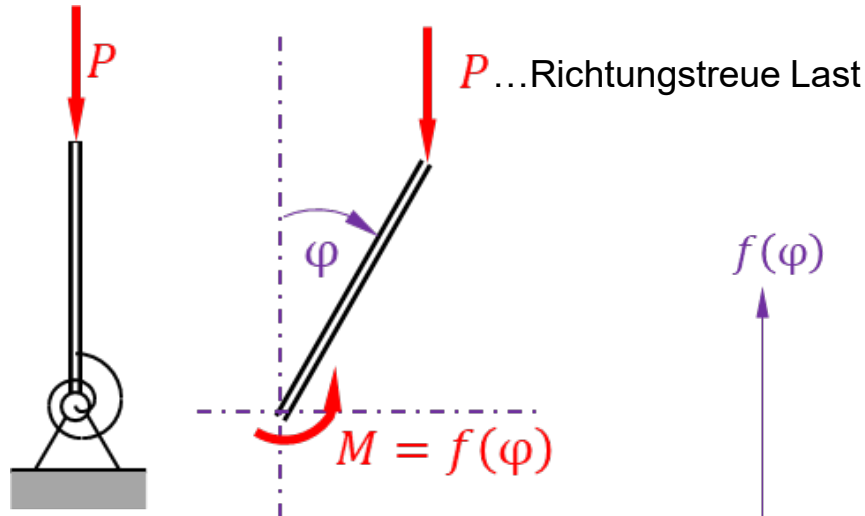


29 Stabilität von Gleichgewichtslagen

29.1 Stabilität von Systemzuständen



Aufgabe: Untersuche $\varphi = 0$ auf Stabilität:

Stabilitätskriterien

- Dynamische Methode
- Energiemethode
- Gleichgewichtsmethode

$$f(\varphi) = \gamma_1 \varphi + \gamma_2 \varphi^2 + \gamma_3 \varphi^3 + \dots$$

29.2 Dynamische Methode

Bewegungsgleichung aufstellen → linearisieren → lösen:

$$I\ddot{\varphi} = -f(\varphi) + Pl \sin \varphi$$

$$I\ddot{\varphi} = -\gamma_1 \varphi + Pl \varphi \quad \leftarrow \text{Linearisierung}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\gamma_1 - Pl}{I} \varphi = 0$$

Also wenn:

$$\gamma_1 - Pl > 0 \rightarrow \varphi = 0 \text{ ist stabil}$$

$$\gamma_1 - Pl < 0 \rightarrow \varphi = 0 \text{ ist instabil}$$

$$P = \frac{\gamma_1}{l} = P_{krit} \dots \text{kritische Last (Stabilitätsgrenze)}$$

29.3 Energiemethode

Die Energiemethode funktioniert nur dann, wenn alle Kräfte (innere und äußere) ein Potential besitzen.

System mit n DOFs: $V(q_1, \dots, q_n)$

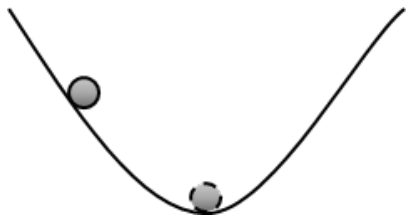
Gleichgewicht, wenn $\delta A = 0 \rightarrow \delta V = 0$

$$\delta V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Der Gleichgewichtszustand wird repräsentiert durch $\underline{q}_0$. Für Stabilität muss V im Gleichgewichtszustand $\underline{q}_0$ ein Minimum sein, also

$$\delta^2 V > 0$$

Kriterium von **Dirichlet**



Stabile Gleichgewichtslage



Instabile Gleichgewichtslage

Bei einer stabilen Gleichgewichtslage führt eine Störbewegung zu einer begrenzten Auslenkung.

Beweis: Das Nullniveau wird so gewählt, dass im Gleichgewicht $V = 0$ ein Minimum ist, also $V > 0$ für alle Nachbarlagen.

Die mit einer Störung des Systems verbundenen Energieanteile seien V_0 und T_0 , die anfängliche Gesamtenergie ist demnach E_0 (konservative Kräfte sind ja vorausgesetzt):

$$E_0 = T_0 + V_0 = E = V + T \rightarrow V = E_0 - T \leq E_0 \text{ weil } T > 0$$

$$\text{also: } 0 \leq V \leq E_0$$

V bleibt also beschränkt, wenn im Gleichgewicht $V = 0$ ein Minimum ist!

Im vorherigen Beispiel gilt also:

$$V = -Pl(1 - \cos \varphi) + \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -Pl \sin \varphi + f(\varphi) = 0 \quad \varphi = 0 \dots \text{Gleichgewichtslage}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -Pl \cos \varphi + f'(\varphi) \Big|_{\varphi=0} > 0 \quad f'(\varphi) = \gamma_1 + 2\gamma_2\varphi + 3\gamma_3\varphi^2 + \dots$$

$$-Pl + \gamma_1 > 0, \text{ dann stabil}$$

Für mehrere DOF's liegt ein stabiles Gleichgewicht vor, wenn:

$$\delta^2 V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j > 0$$

Obige Bedingung ist dann erfüllt, wenn folgende Matrix positiv definit ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{vmatrix} > 0$$

Hurwitz Determinante

Die Matrix muss positiv definit sein. Das bedingt, dass auch alle (nordwestlichen) Subdeterminanten >0 sein müssen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0$$

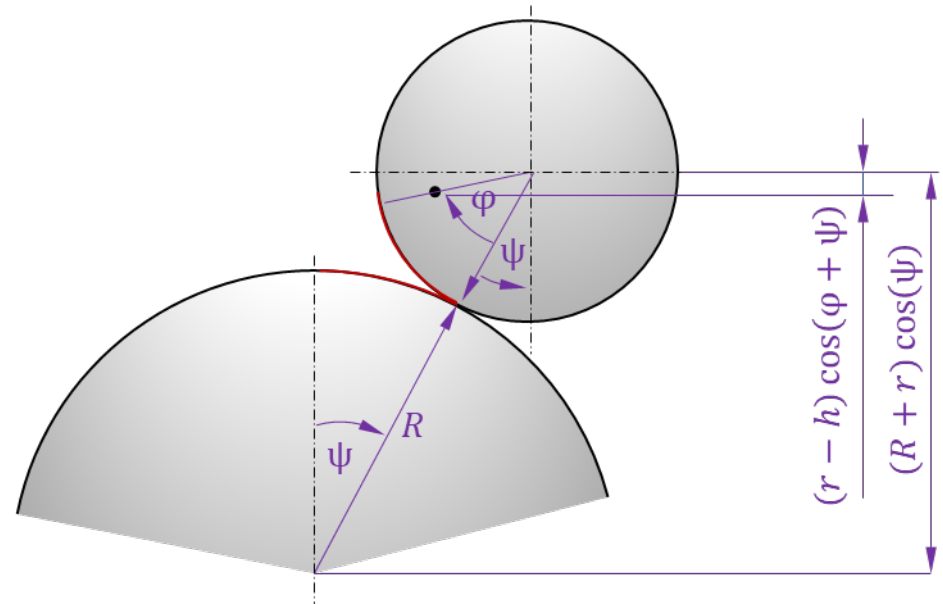
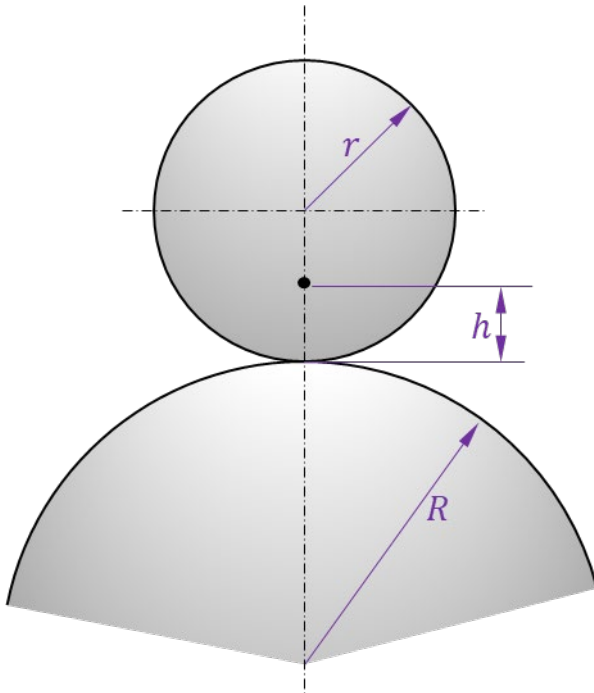
$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2 > 0$$

etc...

Beispiel:

Geg.: r, R, h , reines Rollen

Ges.: h für stabiles Gleichgewicht



Aufgrund des reinen Rollens existiert nur ein Freiheitsgrad.

$$\text{Rollbedingung: } r\varphi = R\psi \rightarrow \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{r}{R}$$

$$V = mgz = mg[(R + r) \cos \psi - (r - h) \cos(\varphi + \psi)]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -mg(R + r) \sin \psi \frac{r}{R} + mg(r - h) \sin(\varphi + \psi) \left(1 + \frac{r}{R}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = mg \frac{R + r}{R} \left[-\cos \psi \frac{r^2}{R} + (r - h) \cos(\varphi + \psi) \left(1 + \frac{r}{R}\right) \right]$$

Für Gleichgewichtslage $\varphi = 0, \psi = 0$:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0, \psi=0} = mg \frac{R + r}{R^2} [-r^2 + (r - h)(R + r)]$$

Aus:

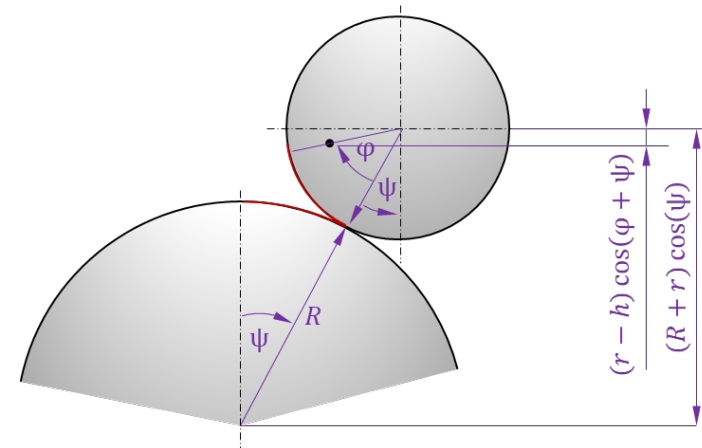
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} > 0 \Rightarrow$$

$$-r^2 + (r - h)(R + r) > 0$$

$$-r^2 + rR - Rh + r^2 - rh > 0$$

$$rR - h(R + r) > 0$$

$$\underline{h < \frac{rR}{R + r}}$$



Probe für $R = \infty$

$$\underline{h < r} \quad \text{stabil!}$$

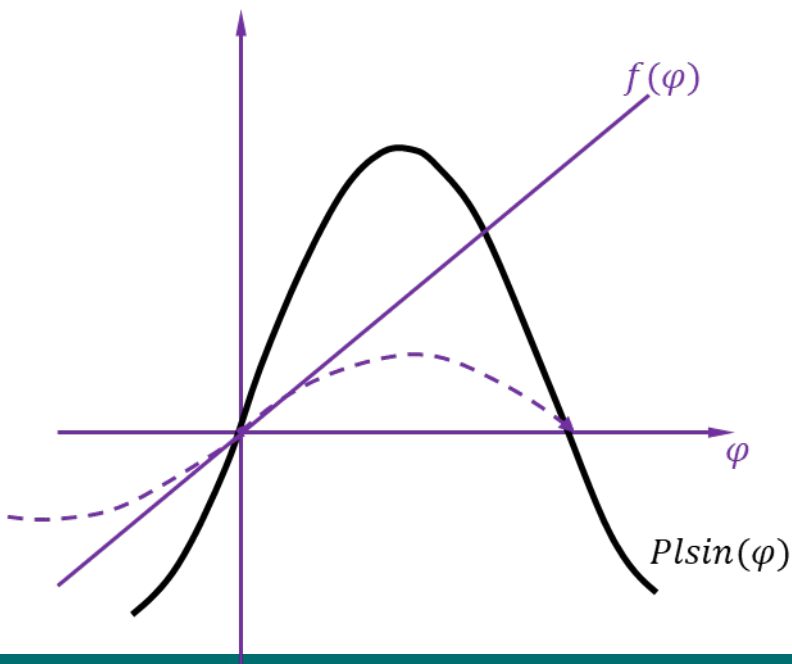
29.4 Gleichgewichtsmethode

Die Gleichgewichtsmethode gibt Auskunft, ob neben der untersuchten Gleichgewichtslage weitere Gleichgewichtslagen existieren.

$$\sum M = 0: f(\varphi) = Pl \sin \varphi$$

$$\gamma_1 \varphi + \gamma_2 \varphi^2 + \gamma_3 \varphi^3 + \dots = Pl \sin \varphi = Pl \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots \right)$$

Wann hat diese Gleichung nicht-triviale Lösungen?



Bei einem linearen Federgesetz existieren nur dann weitere Lösungen (und somit andere Gleichgewichtslagen), wenn Steigung der Feder kleiner ist als die Steigung der Funktion $Pl \sin \varphi$ ausgewertet an der Stelle $\varphi = 0$.

Das ist erfüllt, wenn $\gamma_1 < Pl$

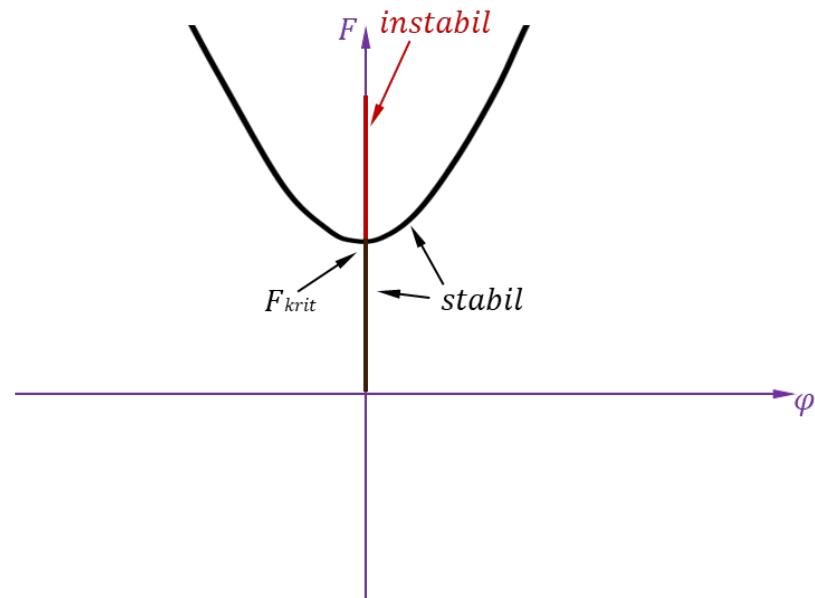
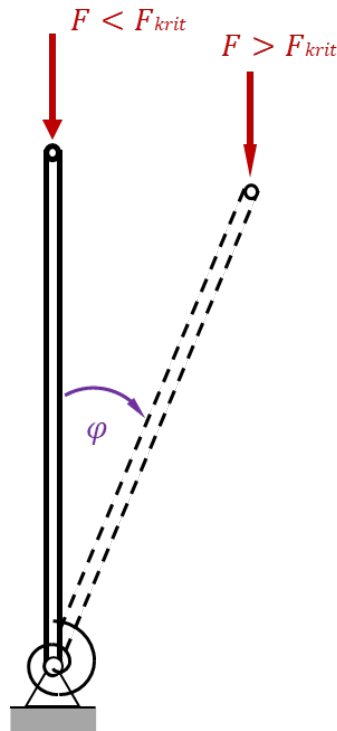
Somit ist im Umkehrschluss das System stabil, wenn $\gamma_1 > Pl$

29.5 Verzweigung und Durchschlagen

Kennzeichnend für Stabilitätsprobleme ist die Mehrdeutigkeit zwischen Belastung und Verschiebung.

29.5.1 Verzweigungsproblem

Das System erreicht einen Verzweigungspunkt, an dem zwei oder mehrere Gleichgewichtspfade kreuzen. Das System verlässt den primären Gleichgewichtspfad und geht in einen anderen über.



29.5.2 Durchschlagsproblem

Bei Durchschlagsproblemen besitzt die Kraft-Verformungskurve Extremwerte. Bei Erreichen einer kritischen Last schlägt die Struktur schlagartig in eine andere Gleichgewichtslage durch.

