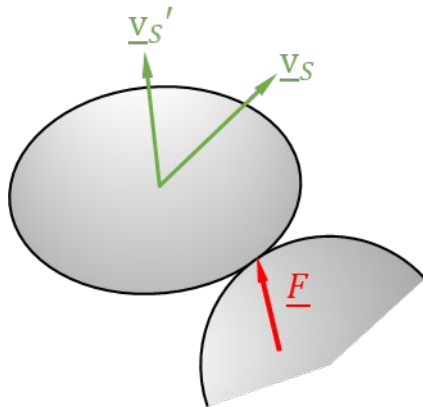


28 Stoßvorgänge

Bei Stoßvorgängen treten die Oberflächen zweier Körper sehr kurzfristig in Kontakt, die dabei auftretenden Kräfte sind sehr groß. Manchmal kommt es dabei auch zu plastischen Verformungen.

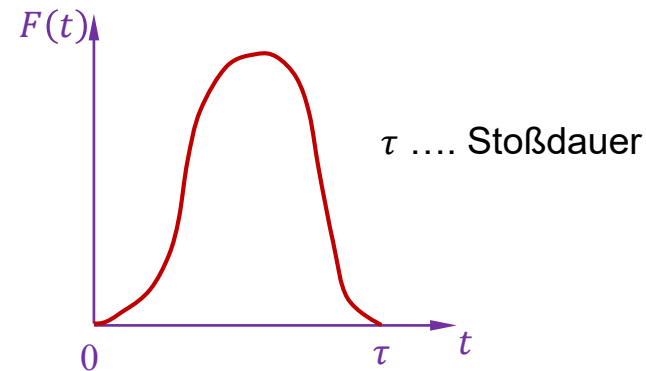
28.1 Idealisierung des Stoßprozesses

- Keine Verformungswellen → Schlagartige Geschwindigkeitsänderung
→ Beschleunigungen und Kräfte wachsen über alle Grenzen
- Stoßdauer geht gegen null
- Die Körper werden bis auf die Umgebung der Stoßstelle als starr angesehen.



$\underline{v}_S$...Geschwindigkeit vor dem Stoß

$\underline{v}_S'$...Geschwindigkeit nach dem Stoß



Während des Stoßvorgangs ändert sich die Lage der Körper nicht.

Schwerpunktsatz:

$$m \frac{d\underline{v}_S}{dt} = \underline{F}(t)$$

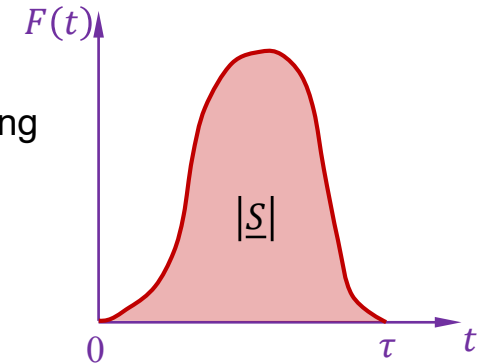
$$m \int_{v(t=0)}^{v(t=\tau)} d\underline{v}_S = \int_0^\tau \underline{F}(t) dt$$

Die Impulsänderung
ist gleich dem
Antrieb.

Satz vom Antrieb

$$m\underline{v}_S' - m\underline{v}_S = \underline{S}$$

$\underline{S} \dots$ **Antrieb**



Für $\tau \rightarrow 0$ wird der Antrieb zum **Stoßantrieb**, der Kraftverlauf wird dann zu einer Dirac Funktion

$$\underline{S}_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \underline{F}_i dt$$

Kontinuierliche Kräfte tragen nichts zum Stoßantrieb bei!

Allgemein:

$$\Delta \underline{p} = \underline{p}' - \underline{p} = \sum_i \underline{S}_i$$

$\underline{p} \dots$ Impuls

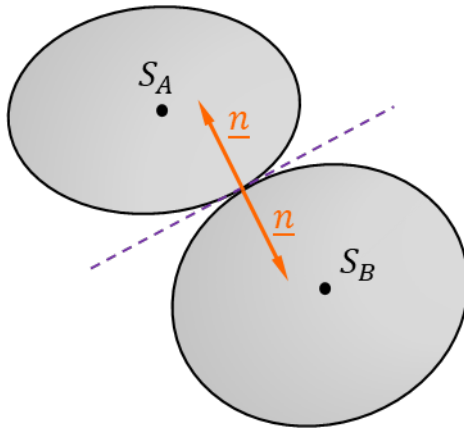
Analog für den Drehimpuls

$$\underline{D}_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \underline{r}_i \times \underline{F}_i dt$$

$$\Delta \underline{D} = \underline{D}' - \underline{D} = \sum_i \underline{r}_i \times \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \underline{F}_i dt$$

$$\Delta \underline{D} = \underline{D}' - \underline{D} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{S}_i$$

28.2 Grundbegriffe



n ... Stoßnormale

Zentrischer Stoß → Stoßnormale geht durch beiden Schwerpunkte

Exzentrischer Stoß → Stoßnormale geht nicht durch die beiden Schwerpunkte

Bei Reibungsfreiheit wirkt s in Richtung von n, ansonsten liegt ein Stoß mit Reibung vor

28.2.1 Vollkommen elastischer Stoß

Beim vollkommen elastischen Stoß bleibt die gesamte mechanische Energie erhalten.

$$T' + V' = T + V \quad \rightarrow \quad T' = T$$

28.2.2 Vollkommen inelastischer Stoß

Die Körper trennen sich nicht sofort sondern, es gilt:

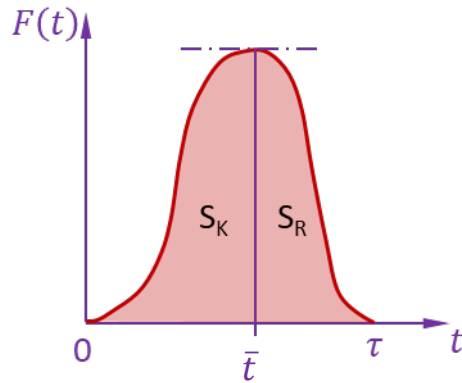
$$\underline{v}_{KA}' \cdot \underline{n} = \underline{v}_{KB}' \cdot \underline{n}$$

$$(\underline{v}_{KA}' - \underline{v}_{KB}') \cdot \underline{n} = 0$$

$\underline{v}_{KA}', \underline{v}_{KB}'$... Geschwindigkeit der Kontaktstelle nach dem Stoß

In Realität liegt zumeist eine Mischform, ein **elastisch-plastischer Stoß** vor.

Man teilt den Stoßvorgang dann in 2 Phasen:



K...Kompressionsphase $0 \rightarrow \bar{t}$

R...Restitutionsphase $\bar{t} \rightarrow \tau$

$$S = S_K + S_R$$

k ...**Stoßziffer**

$$S_R = kS_K$$

$k = 0$...unelastischer Stoß ($S_R = 0$)

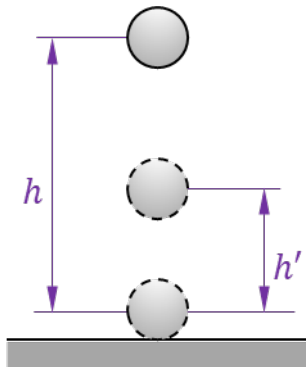
$k = 1$...elastischer Stoß ($S_R = S_K$)

→

$$S = (1 + k)S_K$$

Die Stoßziffer ist abhängig von der Materialpaarung und der Geometrie.

Experimentelle Bestimmung der Stoßzahl k (Fallversuch)

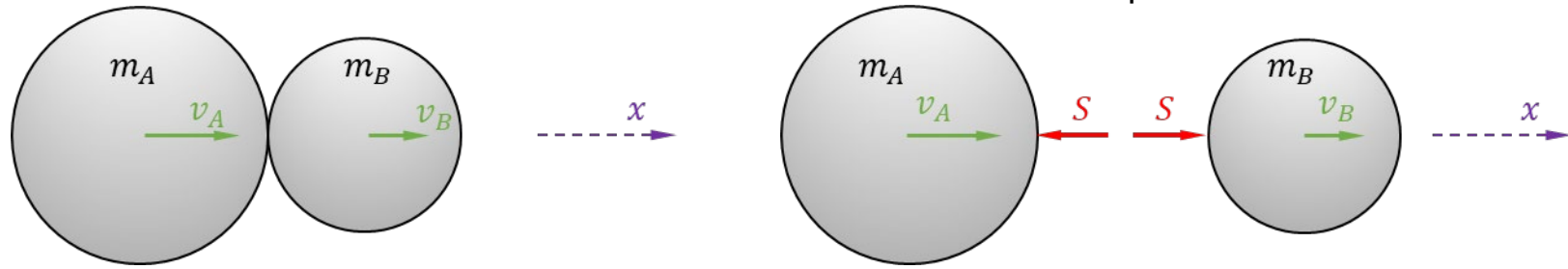


$$v = \sqrt{2gh}$$

$$|v'| = kv = k\sqrt{2gh} = \sqrt{2gh'}$$

$$k = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

28.3 Reibungsfreier zentrischer Stoß



Impulssatz:

$$m_A(v'_A - v_A) = -S \quad (1)$$

$$m_B(v'_B - v_B) = S \quad (2)$$

$$m_A v'_A + m_B v'_B = m_A v_A + m_B v_B \quad \text{.....Impulserhaltung}$$

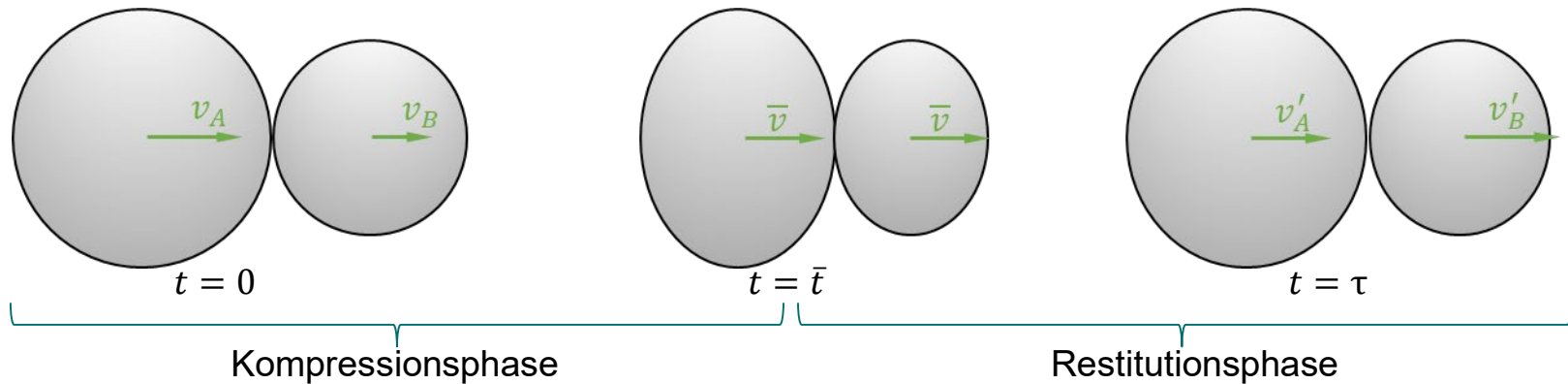
Ist der Stoß **vollkommen elastisch**, dann bleibt auch die Energie erhalten:

$$\frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} m_A v^2_A + \frac{1}{2} m_B v^2_B \quad (3)$$

Ist der Stoß **vollkommen inelastisch**, dann gilt:

$$v'_A = v'_B \quad (3)$$

Ist der Stoß **elastisch-plastisch**: $0 \leq k \leq 1$



Kompressionsphase:

$$m_A(\bar{v} - v_A) = -S_K \quad (1)$$

$$m_B(\bar{v} - v_B) = S_K \quad (2)$$

Restitutionsphase:

$$m_A(v'_A - \bar{v}) = -S_R \quad (3)$$

$$m_B(v'_B - \bar{v}) = S_R \quad (4)$$

$$S_R = kS_K \quad (5)$$

5 Unbekannte: $\bar{v}, v'_A, v'_B, S_R, S_K$

$$v'_A = \frac{(m_A - km_B)v_A + (1+k)m_Bv_B}{m_A + m_B}$$

$$v'_B = \frac{(m_B - km_A)v_B + (1+k)m_Av_A}{m_A + m_B}$$

$$S = (1+k) \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (v_B - v_A)$$

Verlust an
Bewegungs-
energie:

$$\Delta T = T' - T = -\frac{1-k^2}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (v_B - v_A)^2$$

28.3.1 Spezialfälle

Vollkommen elastischer Stoß zweier gleicher Massen

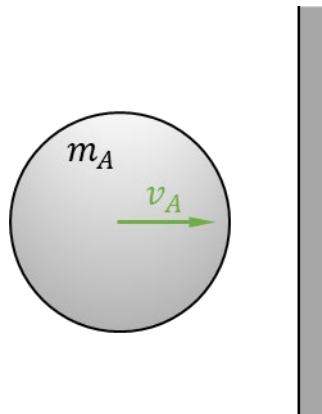
$$k = 1$$

$$m_A = m_B = m$$

$$v'_A = v_B \quad v'_B = v_A$$

Beim vollkommen elastischen Stoß zweier Körper mit gleicher Masse tauschen die Körper ihre Geschwindigkeiten aus.

Stoß gegen eine feste Wand

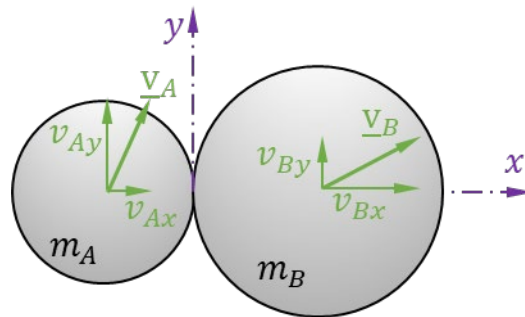


$$m_B \rightarrow \infty, v_B = 0$$

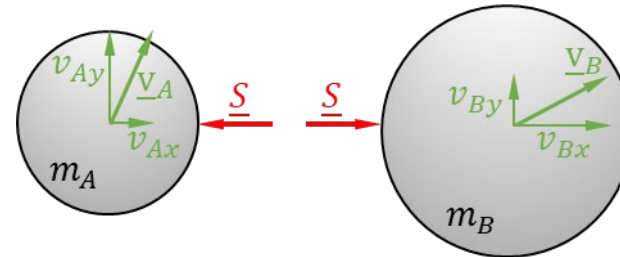
$$v'_A = -kv_A$$

$$v'_B = 0$$

28.4 Reibungsfreier, schiefer zentrischer Stoß



Freikörperbild:



Beim reibungsfreien, schiefen zentrischen Stoß tritt nur in Richtung der Stoßnormale ein Stoßantrieb auf. In obigem Beispiel ist daher die y-Komponente des Stoßantriebs = 0.

Impulssatz in x-Richtung:

$$m_A(v'_{Ax} - v_{Ax}) = -S$$

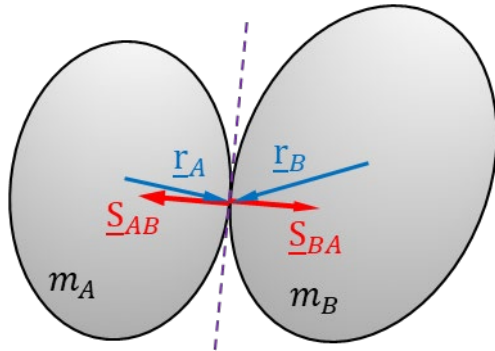
$$m_B(v'_{Bx} - v_{Bx}) = S$$

Impulssatz in y-Richtung:

$$m_A(v'_{Ay} - v_{Ay}) = 0 \quad \rightarrow v'_{Ay} = v_{Ay}$$

$$m_B(v'_{By} - v_{By}) = 0 \quad \rightarrow v'_{By} = v_{By}$$

28.5 Reibungsfreier, exzentrischer Stoß



Impulssatz:

$$m_A(\underline{v}'_A - \underline{v}_A) = \underline{S}_{AB} = \underline{S}$$

$$m_B(\underline{v}'_B - \underline{v}_B) = \underline{S}_{BA} = -\underline{S}$$

Dieses System hat aufgrund des exzentrischen Angriffspunkt zusätzlich noch einen rotatorischen Anteil.

$$\underline{D}'_A - \underline{D}_A = \underline{r}_A \times \underline{S}_{AB} = \underline{r}_A \times \underline{S}$$

$$\underline{D}'_B - \underline{D}_B = \underline{r}_B \times \underline{S}_{BA} = \underline{r}_B \times (-\underline{S})$$

Bsp. Stoß gegen exzentrisch gelagerten Hebel

Geg.: $m_A, m_B, v_B, i_0, p, e, k$

Ges.: v'_B, ω'

Impuls- und Drallsätze:

$$m_B(v'_B - v_B) = -S \quad (1)$$

$$m_A(p - e)\omega' = S + S_{0x} \quad (2)$$

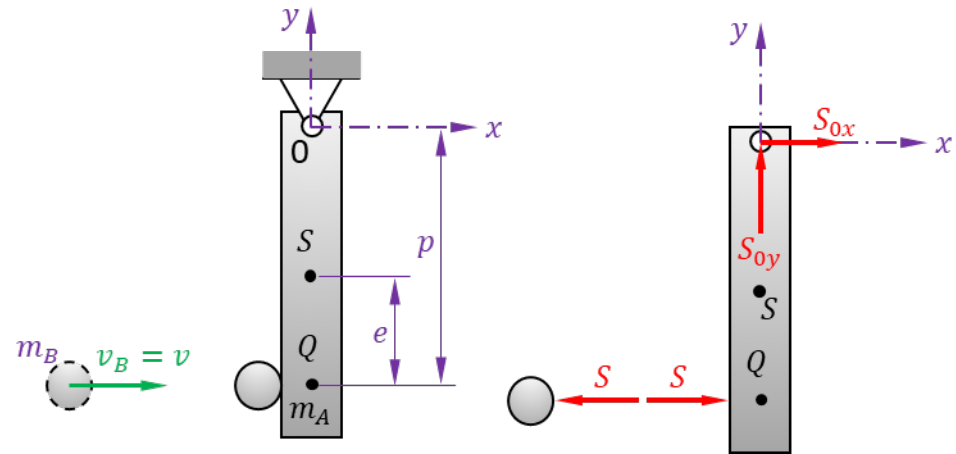
$$m_A i_0^2 \omega' = Sp \quad (3)$$

$$m_B(\bar{v}_B - v_B) = -S_K \quad (4)$$

$$m_A i_0^2 \bar{\omega} = S_K p \quad (5)$$

$$\bar{v}_B = p \bar{\omega} \quad (6)$$

$$S = (1 + k)S_K \quad (7)$$



Kinematik: Am Ende der Kompressionsphase sind die Geschwindigkeiten an den Berührungspunkten identisch.

aus (4) · p + (5)

$$m_A i_0^2 \bar{\omega} + m_B p^2 \bar{\omega} - m_B p v_B = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\omega} = \frac{m_B p v_B}{m_A i_0^2 + m_B p^2}$$

mit (5)

$$S_K = m_A i_0^2 \frac{m_B v_B}{m_A i_0^2 + m_B p^2}$$

und (7)

$$S = (1 + k) \frac{v_B}{\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \left(\frac{p}{i_0}\right)^2}$$

mit (1)

$$v'_B = \left[1 - \frac{(1 + k)}{1 + \frac{m_B}{m_A} \left(\frac{p}{i_0}\right)^2} \right] v_B$$

mit (3)

$$\omega' = \frac{Sp}{m_A i_0^2} = (1 + k) \frac{v_B p}{\frac{m_A}{m_B} i_0^2 + p^2}$$

aus (2) · p - (3)

$$S_{0x} = m_A \omega' \frac{(p^2 - p e - i_0^2)}{p}$$

$$S_{0y} = 0$$

S_{0x} wird null für:

$$p^2 - pe - i_0^2 = 0$$

$$pe = p^2 - i_0^2$$

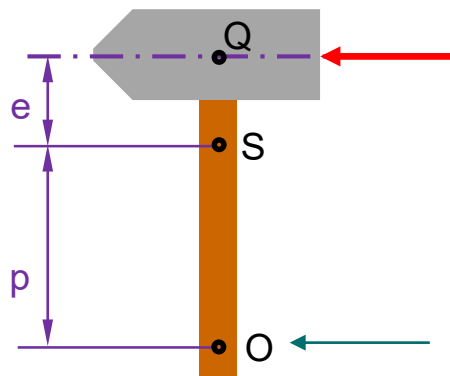
Gemäß Satz von Steiner gilt:

$$i_0^2 - (p - e)^2 = i_Q^2 - e^2$$

$$\underbrace{i_0^2 - p^2}_{-pe} + 2pe - e^2 = i_Q^2 - e^2$$

$$pe = i_Q^2 \rightarrow e = \frac{i_Q^2}{p}$$

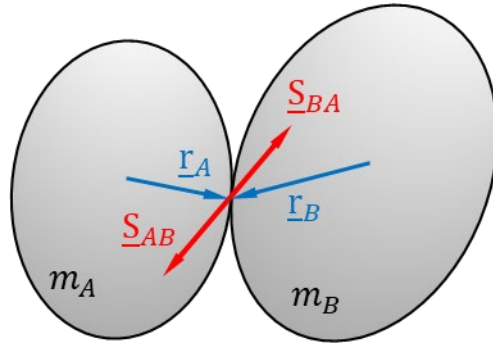
Q...Stoßmittelpunkt: Jener Punkt der Verbindungsline Drehpunkt-Schwerpunkt, durch den die Stoßnormale gehen muss, damit kein Stoßantrieb im Lager auftritt.



Hier sollte möglichst kein Stoß auftreten.

28.6 Stoß mit Verhakung an der Stoßstelle

Annahme: Stoßstellen sind körperfest ($\underline{r}_A = \text{const.}, \underline{r}_B = \text{const.}$), keine sonstigen äußeren Kräfte mit Stoßcharakter



$\underline{v}'_{st}$... Geschwindigkeit der Stoßstelle = Verhakungsstelle nach dem Stoß.

$\underline{I}_{SA}, \underline{I}_{SB}$ Trägheitstensoren bzgl. Der Schwerpunkte

Die Verhakungsstelle wirkt wie ein Gelenk → Keine Momentenübertragung an der Verhakungsstelle

$$m_A(\underline{v}'_A - \underline{v}_A) = \underline{S}_{AB} = \underline{S} \quad (1)$$

$$m_B(\underline{v}'_B - \underline{v}_B) = \underline{S}_{BA} = -\underline{S} \quad (2)$$

$$\underline{I}_{SA}(\underline{\omega}'_A - \underline{\omega}_A) = \underline{r}_A \times \underline{S} \quad (3)$$

$$\underline{I}_{SB}(\underline{\omega}'_B - \underline{\omega}_B) = \underline{r}_B \times (-\underline{S}) \quad (4)$$

$$\underline{v}'_{st} = \underline{v}'_A + \underline{\omega}'_A \times \underline{r}_A = \underline{v}'_B + \underline{\omega}'_B \times \underline{r}_B \quad (5)$$

5 Gleichungen für $\underline{S}, \underline{v}'_A, \underline{v}'_B, \underline{\omega}'_A, \underline{\omega}'_B$

28.6.1 Spezialisierung des Stoßes mit Verhakung auf die ebene Bewegung

Zerlegung der Vektoren:

$$\underline{v}_i = v_{ix}\underline{e}_x + v_{iy}\underline{e}_y$$

$$\underline{\omega}_i = \omega_i\underline{e}_z$$

$$\underline{D}_i = m_i i_{Si}^2 \omega_i \underline{e}_z$$

$$\underline{v}'_i = v'_{ix}\underline{e}_x + v'_{iy}\underline{e}_y$$

$$\underline{\omega}'_i = \omega'_i \underline{e}_z$$

$$\underline{D}'_i = m_i i_{Si}^2 \omega'_i \underline{e}_z$$

$$\underline{S}_{AB} = S_x \underline{e}_x + S_y \underline{e}_y$$

$$\underline{r}_i = r_{ix}\underline{e}_x + r_{iy}\underline{e}_y$$

Mithilfe der Gleichungen (1) bis (4) erhält man somit für die ebene Bewegung:

$$v'_{Ax} = v_{Ax} + \frac{S_x}{m_A}$$

$$v'_{Ay} = v_{Ay} + \frac{S_y}{m_A}$$

$$\omega'_A = \omega_A + \frac{r_{Ax}S_y - r_{Ay}S_x}{m_A i_{SA}^2}$$

$$v'_{Bx} = v_{Bx} - \frac{S_x}{m_B}$$

$$v'_{By} = v_{By} - \frac{S_y}{m_B}$$

$$\omega'_B = \omega_B - \frac{r_{Bx}S_y - r_{By}S_x}{m_B i_{SB}^2}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (5) und Auftrennen nach $\underline{e}_x$ und $\underline{e}_y$ liefert zwei Gleichungen für S_x und S_y

$$\alpha_A S_x - \beta S_y = (v_{Bx} - r_{By}\omega_B) - (v_{Ax} - r_{Ay}\omega_A)$$

$$-\beta S_x + \alpha_B S_y = (v_{By} + r_{Bx}\omega_B) - (v_{Ay} + r_{Ax}\omega_A)$$

Mit:

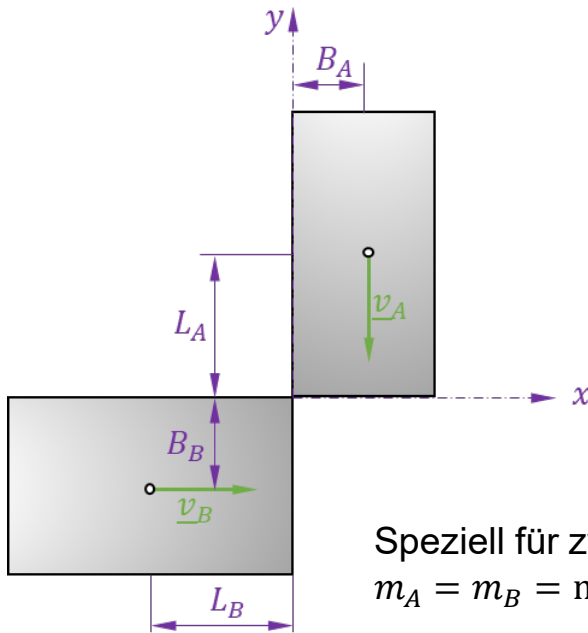
$$\alpha_A = \frac{1}{m_A} \left[1 + \left(\frac{r_{Ay}}{i_{SA}} \right)^2 \right] + \frac{1}{m_B} \left[1 + \left(\frac{r_{By}}{i_{SB}} \right)^2 \right]$$

$$\beta = \frac{r_{Ax}r_{Ay}}{m_A i_{SA}^2} + \frac{r_{Bx}r_{By}}{m_B i_{SB}^2}$$

$$\alpha_B = \frac{1}{m_A} \left[1 + \left(\frac{r_{Ax}}{i_{SA}} \right)^2 \right] + \frac{1}{m_B} \left[1 + \left(\frac{r_{Bx}}{i_{SB}} \right)^2 \right]$$

Bsp. Stoß zweier Fahrzeuge

Geg.: $m_A, m_B, i_{SA}, i_{SB}, \omega_A = \omega_B = 0, v_{Ax} = 0, v_{Ay} = -v_A, v_{Bx} = v_B, v_{By} = 0, r_{Ax} = -B_A, r_{Ay} = -L_A, r_{Bx} = L_B, r_{By} = B_B$



$$\left\{ \frac{1}{m_A} \left[1 + \left(\frac{L_A}{i_{SA}} \right)^2 \right] + \frac{1}{m_B} \left[1 + \left(\frac{B_B}{i_{SB}} \right)^2 \right] \right\} S_x - \left[\frac{L_A B_A}{m_A i_{SA}^2} + \frac{L_B B_B}{m_B i_{SB}^2} \right] S_y = v_B$$

$$- \left[\frac{L_A B_A}{m_A i_{SA}^2} + \frac{L_B B_B}{m_B i_{SB}^2} \right] S_x + \left\{ \frac{1}{m_A} \left[1 + \left(\frac{B_A}{i_{SA}} \right)^2 \right] + \frac{1}{m_B} \left[1 + \left(\frac{L_B}{i_{SB}} \right)^2 \right] \right\} S_y = v_A$$

Speziell für zwei gleiche Fahrzeuge:

$$m_A = m_B = m, i_{SA} = i_{SB} = i_S, L_A = L_B = L, B_A = B_B = B$$

$$S_x = \frac{\alpha v_B + \beta v_A}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$S_y = \frac{\alpha v_A + \beta v_B}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{m} \left[2 + \frac{L^2 + B^2}{i_S^2} \right]$$

$$\beta = \frac{2BL}{mi_S^2}$$