27. Lagrange-Gleichungen

Zur Erinnerung:

$$\delta A = \int_V \underline{f} \cdot \delta \underline{r}\, dV$$

Das Prinzip von d'Alembert besagt $\delta A - \int_m \underline{a} \cdot \delta \underline{r}\, dm = 0$

$$\underline{r}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \rightarrow \delta \underline{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\, \delta q_i$$

n … Anzahl der Freiheitsgrade (DOFs)

q_i … verallgemeinerte Koordinaten

Freiheitsgrad … Koordinate oder Winkellage

$$\int_V \underline{f} \cdot \delta \underline{r}\, dV = \int_V \underline{f} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\, \delta q_i dV = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_V \underline{f} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} dV}_{Q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta q_i$$

Q_i … verallgemeinerte Kräfte

$$\int_m \underline{a} \cdot \delta \underline{r}\, dm = \int_m \underline{a} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\, \delta q_i dm = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \int_m \boxed{\underline{a} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}} dm\, \delta q_i}$$

27.1 Lagrange-Gleichungen - Herleitung

Wir bilden nun folgende Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\right)=\underline{a}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}+\underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} \longrightarrow \underline{a}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}=\boxed{\frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\right)-\underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}}$$

$$\int_m \underline{a}\cdot\delta\underline{r}\,dm=\int_m \underline{a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\,\delta q_i dm=\sum_{i=1}^{n}\int_m \underline{a}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\,\delta q_i dm$$

$$\underline{v}=\frac{d}{dt}\underline{r}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i+\frac{\partial \underline{r}}{\partial t}\quad\Big|\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \longrightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}$$

$$\int_m \boxed{\underline{a}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}}\,dm=\underbrace{\int_m \frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\right)dm}_{(1)}-\underbrace{\int_m \underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\,dm}_{(2)}$$

(1) $$\int_m \frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\right)dm=\frac{d}{dt}\int_m \underline{v}\cdot\frac{\partial \underline{v}}{\partial \dot{q}_i}\,dm=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{1}{2}\int_m v^2\,dm=\underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}}$$

(2) $$\int_m \underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\,dm=\int_m \underline{v}\cdot\frac{\partial \underline{v}}{\partial q_i}\,dm=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{2}\int_m v^2\,dm=\underline{\frac{\partial T}{\partial q_i}}$$

Wir können nun die virtuelle Arbeit der d'Alembertschen Trägheitskräfte wie folgt schreiben:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \int_m \underline{a} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} dm\, \delta q_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}} - \underline{\frac{\partial T}{\partial q_i}} \right) \delta q_i$$

Insgesamt lässt sich somit das Prinzip von d'Alembert folgendermaßen umschreiben:

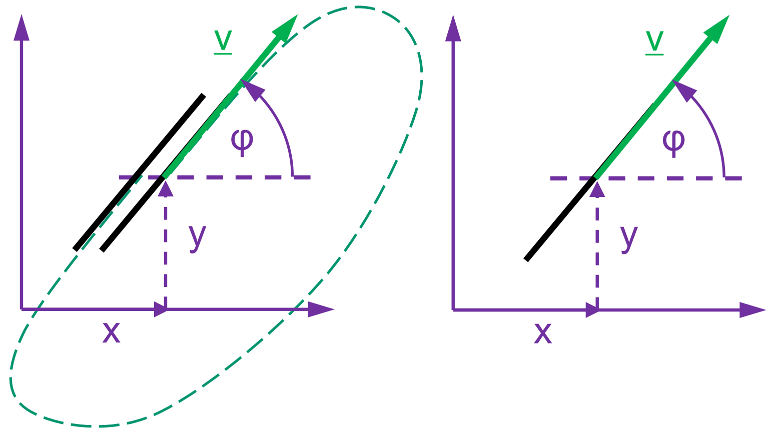
$$\delta A - \int_m \underline{a} \cdot \delta \underline{r}\, dm = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

q_i … DOFs, voneinander unabhängig → das muss nicht notwendigerweise für δq_i gelten.

Gewisse Systeme haben „im Großen" mehr DOFs als „im Kleinen", immer dann, wenn es Zusammenhänge zwischen verallgemeinerter Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ gibt.

Man nennt derartige Systeme nicht-holonome Systeme

Beispiel für ein nicht-holonomes System: Schlittschuh



$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v\cos\varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = v\sin\varphi$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\varphi$$

$$\rightarrow \quad \delta x = \cot\varphi\,\delta y$$

… Zusammenhang zwischen δx und δy!

In weiterer Folge: Beschränkung auf holonome Systeme!

$$\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$ Lagrange Gleichungen

Vorteile:

- Virtuell leistungslose Kräfte treten nicht auf!
- Besitzen die Kräfte ein Potential V=U+W

  U … Potential der inneren Kräfte

  W … Potential der äußeren Kräfte

dann:

$$-\delta V = \delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Einführen einer Funktion $\mathcal{L} = T - V$ … Lagrange Funktion

... das Potential hängt nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten ab

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \cancel{\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Kräfte, die kein Potential besitzen (z.B. Reibungskräfte), verbleiben als verallgemeinerte Kräfte auf der rechten Seite der Lagrange-Gleichungen:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i}$$

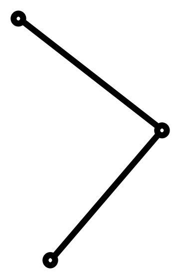
Arten von Zwangsbedingungen:

- holonome (= ganzgesetzlich) Zwangsbedingungen z.B. bei Führungen → verknüpfen die Lagekoordinaten miteinander → Reduktion der DOFs

DOF = 6r – k

k … Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen

r … Anzahl der starren Körper

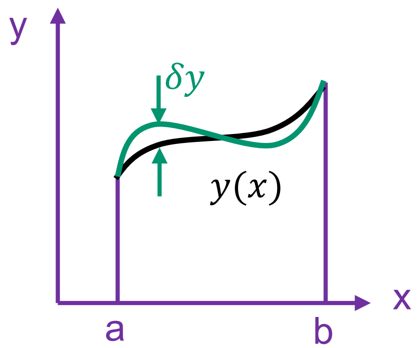


Es kommen aber keine $\dot{q}_i$ vor.

- holonom skleronome (=starrgesetzlich) Zwangsbedingungen sind holonome Zwangsbedingungen, die nicht von der Zeit abhängen.
- holonom rheonome (=fließgesetzlich) Zwangsbedingungen hängen explizit von der Zeit ab.
- nicht-holonome Zwangsbedingungen enthalten Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten

Mathematischer Einschub: Variationsrechnung

Geg.: $F(x, y(x), y'(x))$ mit Randbedingungen: $y(a), y(b)$



Ges.: Jene Funktion $y(x)$, die folgendes Funktional minimiert/maximiert

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

→ Um ein Extremum von $I(y)$ zu finden, muss gelten: $\delta I(y, \delta y) = 0$ …Euler-Lagrange-Gleichung

Lösung: Man erhält y(x) aus der Eulerschen Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Beweis:

$$\delta I(y,\delta y) = \int_a^b [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')]\, dx = 0$$

Taylorreihen-Entwicklung:

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') \approx F(x,y,y') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

$$\delta I(y,\delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right] dx = 0$$

Partielle Integration:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right) dx = \cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_a^b} - \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\right] dx$$

Der Randterm fällt aufgrund der RB $y(a), y(b)$ weg.

also: $\delta I = \int_a^b \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]}_{\to\, =0\text{, siehe oben. q.e.d.}} \delta y\, dx \overset{!}{=} 0$

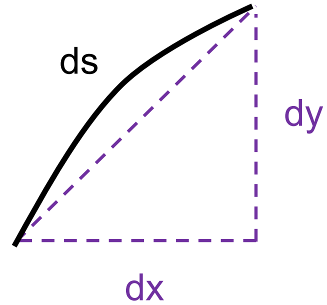
muss für beliebige δy gelten. Das ist nur möglich, wenn die eckige Klammer verschwindet.

27.1 Lagrange-Gleichungen - Herleitung

Beispiel:

Geg.: $y(a), y(b), F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$

Ges.: y(x), sodass $\int_a^b F(x,y,y')\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ minimal wird



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

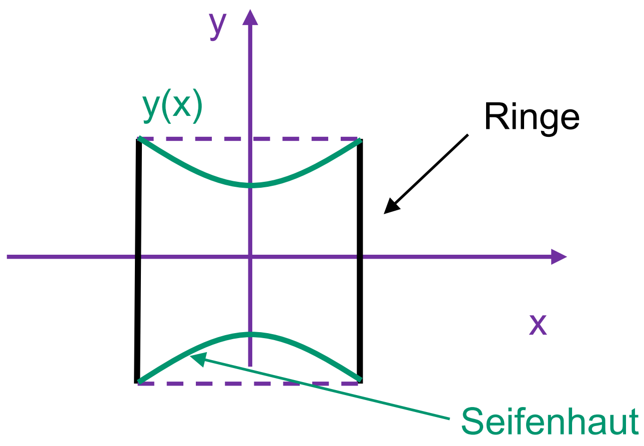
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y'\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}y''}{1+y'^2} = \frac{y''(1+\cancel{y'^2}-\cancel{y'^2})}{(1+y'^2)^{3/2}} = 0 \quad \rightarrow \quad y'' = 0$$

$\rightarrow \quad y(x) = Cx + D$ aus RB: $y(a), y(b) \rightarrow C, D$

Beispiel: Seifenhaut über zwei Ringen

Ges.: y(x), sodass die Oberfläche minimal wird

Lösung: Kettenlinie y(x) = cosh(x)



Man ersetze nun im allgemeinen Formalismus der Variationsrechnung $F(x, y, y') \rightarrow \mathcal{L}(\mathrm{t}, q_i, \dot{q}_i)$, dann erhält man:

$$\overline{\mathrm{W}} = \int_{t1}^{t2} \mathcal{L}(\mathrm{t}, q_i, \dot{q}_i)\, dt \quad \rightarrow \quad \text{min}$$

$\overline{\mathrm{W}}$ ... Wirkungsfunktional

Hamiltonsches Prinzip: beruht auf der Extremalisierung des Wirkungsfunktionals, hier gebildet mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - V$

Das führt wieder auf $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

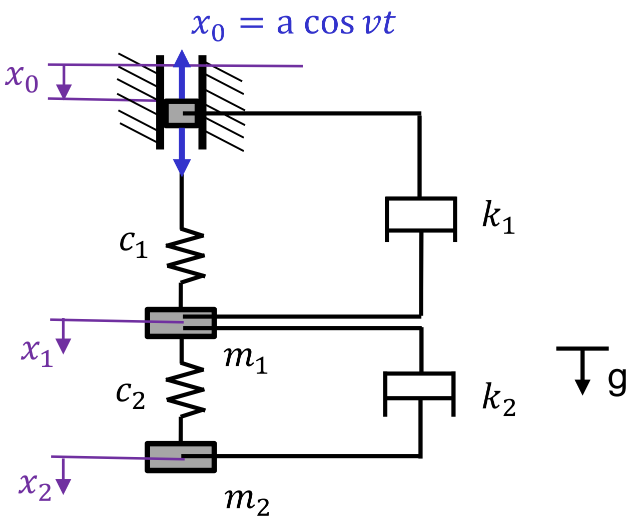
27.2 Schwingungstilger

Gegeben: $m_1, m_2,\ c_1,\ c_2,\ k_1,\ k_2, x_0 = a\cos vt$

Gesucht: Bewegungsgleichungen

Zwei Freiheitsgrade: $x_1,\ x_2$

x_0 ist die vorgegebene Bewegung, daher kein DOF



Energien:

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2$

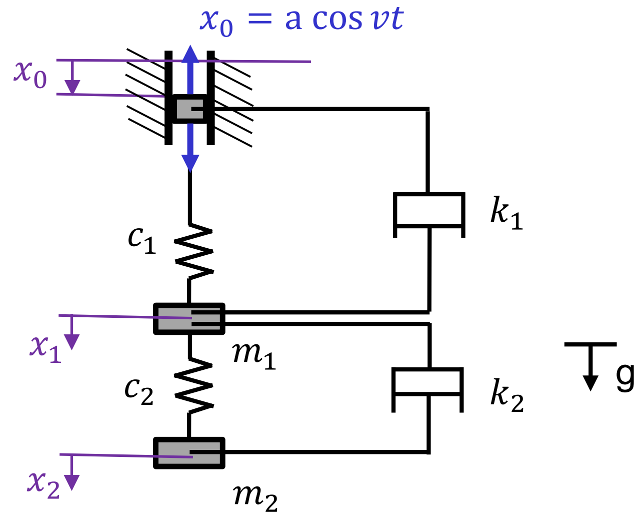
Pot. Energie der inneren Kräfte: $U = \frac{c_1}{2}(x_1 - x_0)^2 + \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2$

Pot. Energie der äußeren Kräfte: $W = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2$

Potentielle Energie: $V = U + W = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + \frac{c_1}{2}(x_1 - x_0)^2 + \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2$

Lagrange Funktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2 + m_1\, g x_1 + m_2 g x_2 - \frac{c_1}{2}(x_1 - x_0)^2 - \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2$$



Dämpfung:

$$D_1 = -k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)$$

$$D_2 = -k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Äußere Arbeit nach d'Alembert:

$$\delta A = D_1(\delta x_1 - \cancel{\delta x_0}) + D_2(\delta x_2 - \delta x_1)$$

→ $\delta x_0 = 0$ da kein Freiheitsgrad

$$\delta A = -k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)\delta x_1 - k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\delta x_2 - \delta x_1) =$$

$$\underbrace{[-k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)]}_{Q_1}\delta x_1 - \underbrace{[k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)]}_{Q_2}\,\delta x_2$$

Zur Erinnerung: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2 + m_1\, g x_1 + m_2 g x_2 - \frac{c_1}{2}(x_1 - x_0)^2 - \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = m_1 g - c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = m_2 g - c_2(x_2 - x_1)$$

i = 1: $m_1\ddot{x}_1 - m_1 g + c_1(x_1 - x_0) - c_2(x_2 - x_1) = -k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

i = 2: $m_2\ddot{x}_2 - m_2 g + c_2(x_2 - x_1) = -k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

Das lässt sich übersichtlicher auch so schreiben:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_0 + k_1 \dot{x}_0 + m_1 g \\ m_2 g \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}} \quad + \quad \underline{\underline{D}}\,\underline{\dot{x}} \quad + \quad \underline{\underline{K}}\,\underline{x} \quad = \quad \underline{F}$$

Trägheitsterm | Dämpfungsterm | Steifigkeitsterm | Lastterm

$\underline{\underline{M}}$ …Massenmatrix

$\underline{\underline{D}}$ … Dämpfungsmatrix

$\underline{\underline{K}}$ …Steifigkeitsmatrix

$\underline{F}$ … Kraft-/Lastvektor

27.2 Schwingungstilger

Lösung der gekoppelten linearen Differentialgleichungen des Systems:

$$x_1 = {x_1}^h + {x_1}^p \qquad {x_1}^h = A\cos(\omega t - \varepsilon)$$

$$x_2 = {x_2}^h + {x_2}^p \qquad {x_2}^h = B\cos(\omega t - \varepsilon)$$

Annahme: ungedämpftes System

$\rightarrow k_1, k_2 = 0$

$$-m_1\omega^2 A\,\cancel{\cos(\omega t - \varepsilon)} + (c_1 + c_2)\,A\,\cancel{\cos(\omega t - \varepsilon)} - c_2\,B\,\cancel{\cos(\omega t - \varepsilon)} = 0$$

$$-m_2\omega^2 B\,\cancel{\cos(\omega t - \varepsilon)} + c_2\,B\,\cancel{\cos(\omega t - \varepsilon)} - c_2\,A\,\cancel{\cos(\omega t - \varepsilon)} = 0$$

$$(-m_1\omega^2 + c_1 + c_2)A - c_2\,B = 0$$

$$-c_2\,A + (-m_2\omega^2 + c_2)B = 0$$

→ Eigenwertproblem

Nichttriviale Lösungen für A und B wenn $\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & -m_2\omega^2 + c_2 \end{vmatrix} = 0$

→ $m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 c_2 + m_2(c_1 + c_2)]\omega^2 + c_1 c_2 = 0$

Lösung: ω_1^2, ω_2^2…Eigenfrequenzen des Systems

$${x_1}^h = A_1 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2)$$

$${x_2}^h = B_1 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + B_2 \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2)$$

homogene Lösung!

Für die partikuläre Lösung machen wir folgenden Ansatz:

$$x_1{}^P = E + F\cos\nu t$$

$$x_2{}^P = G + H\cos\nu t$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert:

$$-m_1\nu^2 F\cos\nu t + (c_1+c_2)\,(E + F\cos\nu t) - c_2\,(G + H\cos\nu t) = m_1 g + c_1 a\cos\nu t \qquad (1)$$

$$-m_2\nu^2 H\cos\nu t + c_2\,(G + H\cos\nu t) - c_2\,(E + F\cos\nu t) = m_2 g \qquad (2)$$

Die Gleichungen müssen zu jedem beliebigen Zeitpunkt t erfüllt sein. Dass ist nur möglich, wenn in (1)

$$[-m_1\nu^2 + (c_1+c_2)]F - c_2 H = c_1\, a \qquad (1a)$$

$$(c_1+c_2)\,E - c_2\,G = m_1 g \qquad (1b)$$

und in (2)

$$-c_2\,F + (-m_2\nu^2 + c_2)H = 0 \qquad (2a)$$

$$-c_2\,E + c_2\,G = m_2 g \qquad (2b)$$

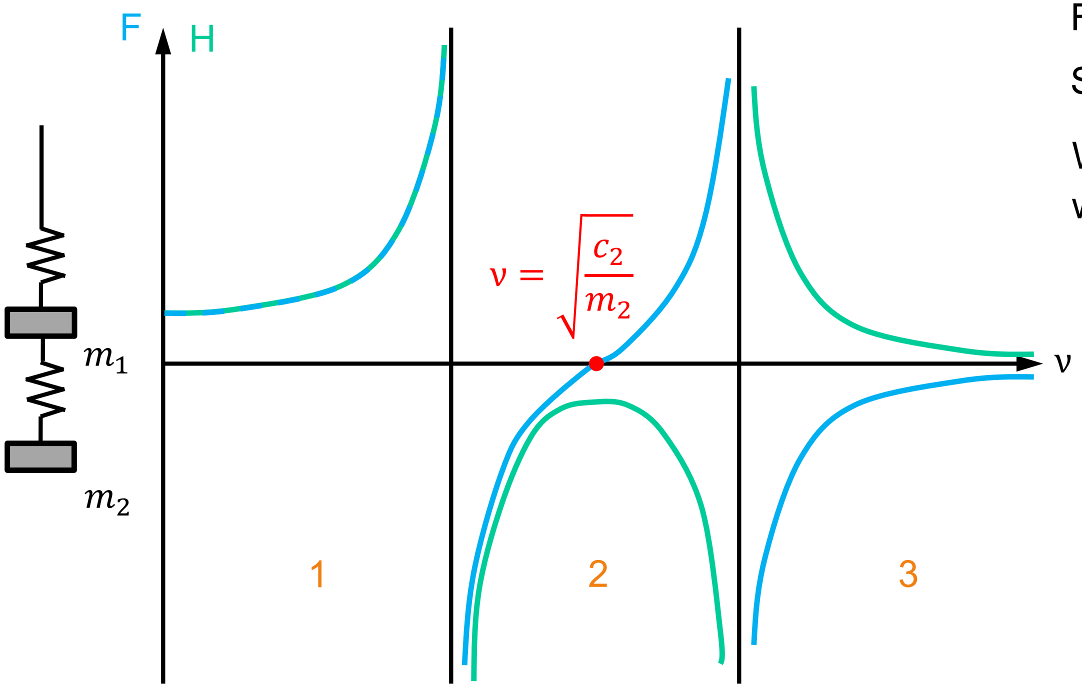
E, G liefern die statische Absenkung unter Eigengewicht

F, H liefern die Amplituden der Schwingung

Aus (1a) und (2a) folgt

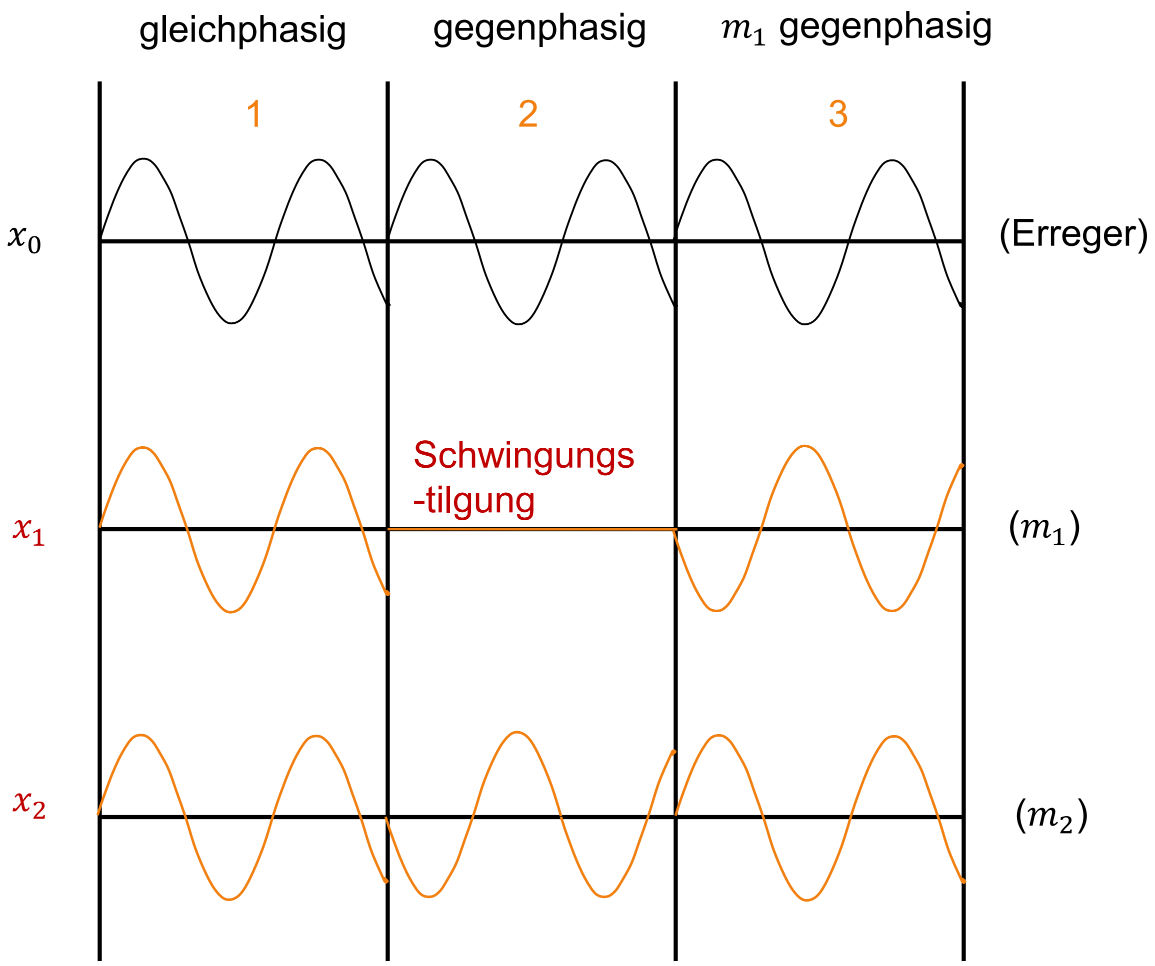
$$F = \frac{(c_2 - m_2\nu^2)c_1}{D(\nu)} \qquad H = \frac{c_1 c_2}{D(\nu)}a$$

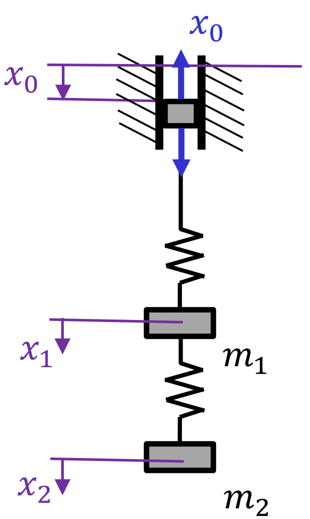
$D(\nu) = [-m_1\nu^2 + (c_1+c_2)](-m_2\nu^2 + c_2) - c_2^2$… Determinante aus der Kramerschen Regel



Für vollständiges Tilgen der Schwingung muss $F = 0 \;\rightarrow \frac{c_2}{m_2} = \nu^2$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird $D(\nu) = -c_2^2$, somit $H = -\frac{c_1}{c_2}a$


gleichphasig
gegenphasig
m_1 gegenphasig
1
2
3
x_0
(Erreger)
Schwingungs
-tilgung
x_1
(m_1)
x_2
(m_2)


x_0
x_0
x_1
m_1
x_2
m_2