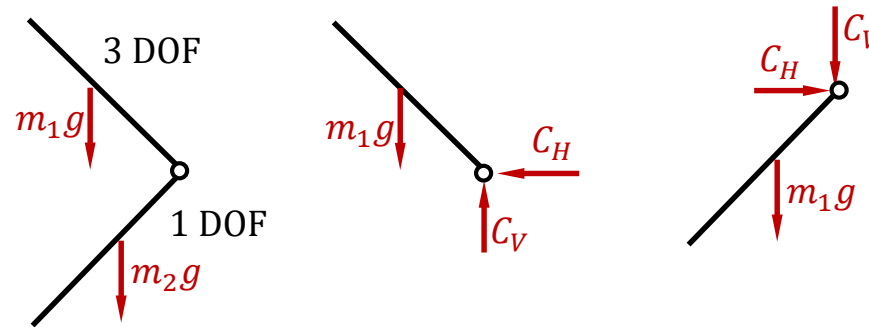


26 Das Prinzip von d'Alembert

26.1 Allgemeines



Gesucht ist eine Methode, mit der man für ein System mit n -Freiheitsgraden nur genau n Gleichungen anschreibt, ohne zusätzliche Unbekannte einführen zu müssen.

Für ein System bestehend aus r starren Körpern und n Freiheitsgraden gilt:

in der Ebene: $n \leq 3r$

im Raum: $n \leq 6r$

Die Lage des Systems ist durch n Lagekoordinaten $q_i(t)$ $i = 1 \dots n$ definiert. Die Lagekoordinaten sind gleichzeitig die Freiheitsgrade des Systems.

Wir halten die Zeit an und erteilen dem System eine virtuelle Verschiebung mit folgenden Eigenschaften:

- Virtuelle Verschiebungen müssen geometrisch möglich sein (Randbedingungen dürfen nicht verletzt werden),
- die Verschiebungen sind klein gegenüber den Abmessungen,
- Es handelt sich nur um gedachte Verschiebungen. Sie müssen mit der tatsächlichen Bewegung nicht übereinstimmen,
- Die virtuellen Verschiebungen werden durch das Variationssymbol δ gekennzeichnet.

Die Position eines beliebigen Punkts des Systems ist somit eine Funktion der Freiheitsgrade $\underline{r}(q_1 \dots q_n)$.
Für die **Variationsableitung** (=virtuelle Verschiebung dieses Punkts) gilt:

$$\delta \underline{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Die Multiplikation des dynamischen Grundgesetzes mit $\delta \underline{r}$ liefert

$$\underline{f} - \rho \underline{a} = \underline{0} \rightarrow (\underline{f} - \rho \underline{a}) \cdot \delta \underline{r} = 0$$

Die Integration über das Volumen des Systems ergibt

$$\int_V (\underline{f} - \rho \underline{a}) \cdot \delta \underline{r} dV = 0$$

Das entspricht der **virtuellen Arbeit**

$$\delta A = \int_V \underline{f} \cdot \delta \underline{r} dV \quad \text{Aufspalten von } \delta A = \underbrace{\delta A^{(i)}}_{\text{Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte}} + \underbrace{\delta A^{(a)}}_{\text{Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte}}$$

Mit $dm = \rho dV$ wird daraus $\delta A^{(i)} + \delta A^{(a)} - \int_m \underline{a} \cdot \delta \underline{r} dm = 0$

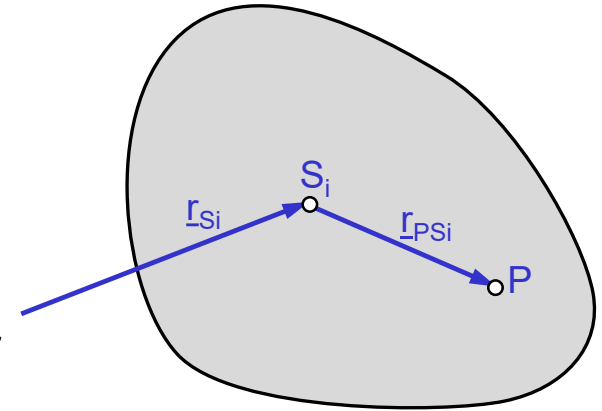
Im Starkörper i des Systems gilt:

$$\underline{r}_P = \underline{r}_{Si} + \underline{r}_{PSi}$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{Si} + \underline{\omega}_i \times \underline{r}_{PSi}$$

$$d\underline{r}_P = d\underline{r}_{Si} + d\underline{\alpha}_i \times \underline{r}_{PSi} \quad \rightarrow \text{Multiplizieren mit } dt$$

$$\delta \underline{r}_P = \delta \underline{r}_{Si} + \delta \underline{\alpha}_i \times \underline{r}_{PSi} \quad \rightarrow \text{Formales Ersetzen von } d \text{ durch } \delta$$



$$\int_{m_i} \underline{a}_P \cdot \delta \underline{r}_P dm = \int_{m_i} \underline{a}_P \cdot (\delta \underline{r}_{Si} + \delta \underline{\alpha}_i \times \underline{r}_{PSi}) dm$$

$$m_i \underline{a}_{Si} \cdot \delta \underline{r}_{Si} + \underbrace{\delta \underline{\alpha}_i \cdot \int_{m_i} (\underline{r}_{PSi} \times \underline{a}_P) dm}_{\underline{D}_{Si} \text{ bezüglich Schwerpunkt, siehe Momentensatz}}$$

Allg: Definition Drehimpuls: $\underline{D}_i = \int_{m_i} (\underline{r}_P \times \underline{v}_P) dm$

Diese Relation stellt das **d'Alembertsche Prinzip** für ein System aus mehreren, miteinander verbundenen starren Körpern dar. Bei einer virtuellen Verschiebung eines Systems aus der Ruhelage heraus ist die von den äußeren, den inneren und den Trägheitskräften geleistete Arbeit gleich null.

$$\delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} - \sum_{i=1}^r (m_i \underline{a}_{Si} \cdot \delta \underline{r}_{Si} + \underline{D}_{Si} \cdot \delta \underline{\alpha}_i) = 0$$

26.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

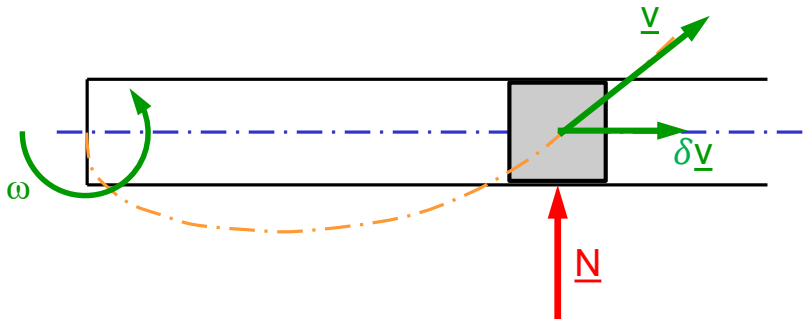
Für das in Ruhe befindliche System gilt offensichtlich

$$\delta A = \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0$$

Bei der virtuellen Verschiebung eines Systems aus der Gleichgewichtslage heraus, ist die von den inneren und äußeren Kräften geleistete virtuelle Arbeit gleich null.

Diese Aussage ist insbesondere dann wertvoll, wenn gewisse Kräftegruppen **virtuell leistungslos** sind, wie das beispielsweise bei idealen Führungen und Gelenken der Fall ist.

Bsp.: Masse in rotierendem Rohr

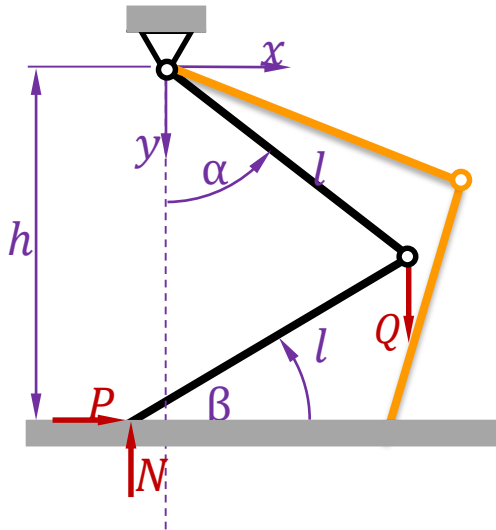


$\underline{N}$ ist virtuell leistungslos, da $\delta \underline{v} \perp \underline{N}$

Beachte: Das System hat nur einen Freiheitsgrad, nämlich die Verschiebung der Masse im Rohr.
 ω ist kein Freiheitsgrad, da vorgegeben!

Außerdem ist die Arbeit der inneren Kräfte bei Starrkörpern im allgemeinen = 0. Vorsicht ist allerdings bei Federn geboten, denn Federkräfte sind im allgemeinen nicht virtuell leistungslos!

Bsp.: Stabeck:



Geg. h, l, α, β, Q

Ges. P sodass Gleichgewicht herrscht

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_P = \begin{pmatrix} l \sin \alpha - l \cos \beta \\ l \cos \alpha + l \sin \beta \end{pmatrix} \quad \delta \underline{r}_P = \begin{pmatrix} l \cos \alpha \delta \alpha + l \sin \beta \delta \beta \\ -l \sin \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta \end{pmatrix}$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \quad \underline{r}_Q = \begin{pmatrix} l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \delta \underline{r}_Q = \begin{pmatrix} l \cos \alpha \delta \alpha \\ -l \sin \alpha \delta \alpha \end{pmatrix}$$

Das System besitzt nur einen Freiheitsgrad. Wenn der Winkel α sich verändert, so muss sich der Winkel β zwangsläufig auch ändern.

Die Normalkraft und die Kräfte im Aufhängungspunkt sind virtuell leistungslos.

Bsp.: Stabeck, Fortsetzung:

Das Prinzip der virtuellen Arbeit verlangt $\delta A = 0$, also

$$\delta A = \underline{Q} \cdot \delta \underline{r}_Q + \underline{P} \cdot \delta \underline{r}_P = 0$$

$$\delta A = -Ql \sin \alpha \delta \alpha + P(l \cos \alpha \delta \alpha + l \sin \beta \delta \beta) = 0$$

Nebenbedingung: $h = l \cos \alpha + l \sin \beta$, daraus folgt $\delta h = -l \sin \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta$.
h ändert sich aber nicht, somit ist auch die Variationsableitung $\delta h = 0$.

$$-l \sin \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta = 0 \quad \rightarrow \delta \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \delta \alpha$$

$$\delta A = -Ql \sin \alpha \delta \alpha + Pl \left(\cos \alpha \delta \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \sin \beta \delta \alpha \right) = 0$$

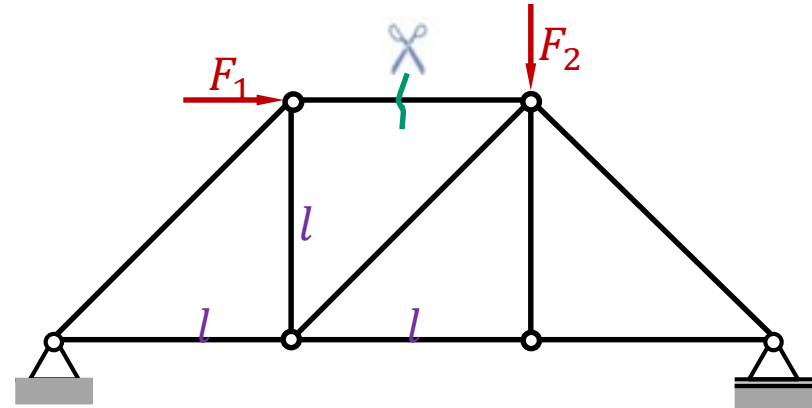
$$\delta A = \underbrace{\left[-Q \sin \alpha + P \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) \right]}_{=0} l \delta \alpha = 0 \quad \rightarrow \underline{P = \frac{Q}{\tan \beta + \cot \alpha}}$$

muss = 0 sein, da die Gleichung für eine beliebige Variation des Freiheitsgrads $\delta \alpha$ erfüllt sein muss!

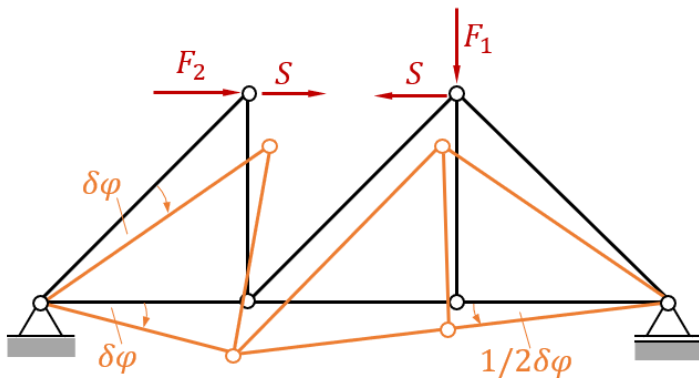
Bsp.: Fachwerk:

Geg.: F_1, F_2, l

Ges.: Stabkraft S



Ersetzen des Stabes durch eine Stabkraft:



$$\delta A = (F_2 + S)l\delta\varphi + Sl\frac{\delta\varphi}{2} + F_1l\frac{\delta\varphi}{2} = 0$$

Diese Gleichung muss für alle $\delta\varphi$ Gültigkeit besitzen!!!

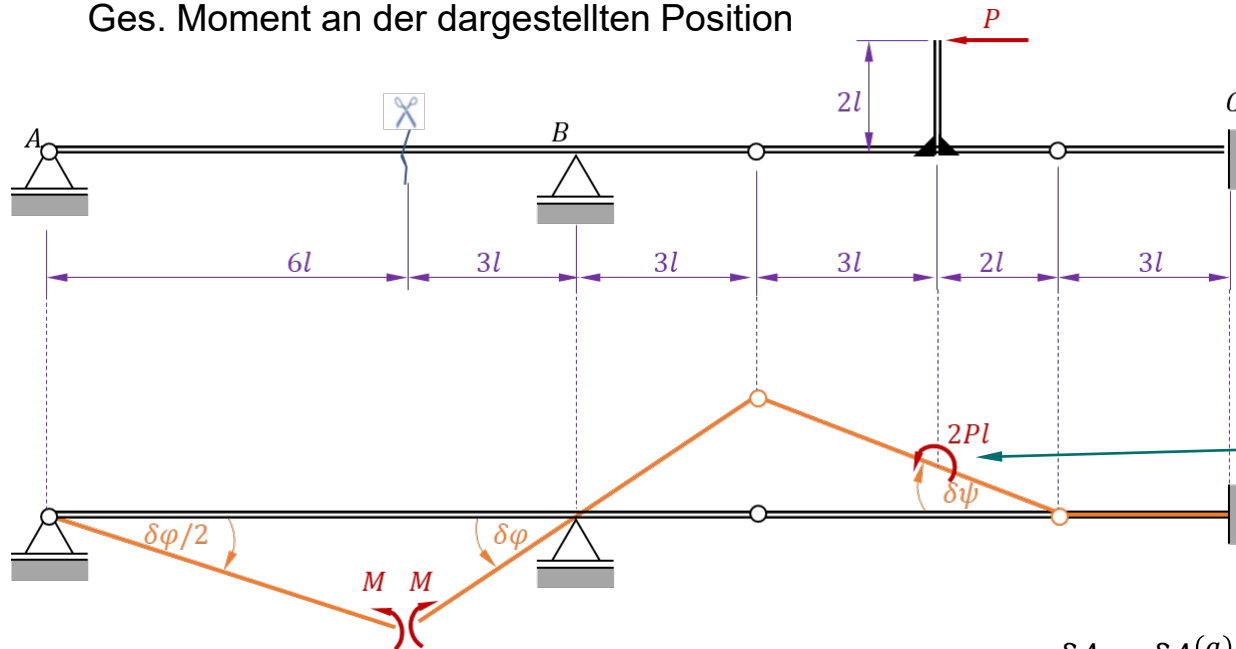
$$\delta A = \left(F_2 + \frac{3}{2}S + \frac{1}{2}F_1 \right) \delta\varphi = 0$$

$$\underline{S = -\frac{1}{3}(F_1 + 2F_2)}$$

Bsp. Träger:

Geg. P, l

Ges. Moment an der dargestellten Position



$$5l\delta\psi = 3l\delta\varphi$$

$$\delta\psi = \frac{3}{5}\delta\varphi$$

Reduktion von P in diesen Punkt.
Horizontalverschiebungen sind vernachlässigbar

5 Unbekannte: A, B, C_H, C_V, M_E

3 Gleichgewichtsbedingungen + 2 Gelenke

$$\delta A = \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0$$

$$\delta A = -\frac{1}{2}M\delta\varphi - M\delta\varphi - 2Pl\frac{3}{5}\delta\varphi = 0$$

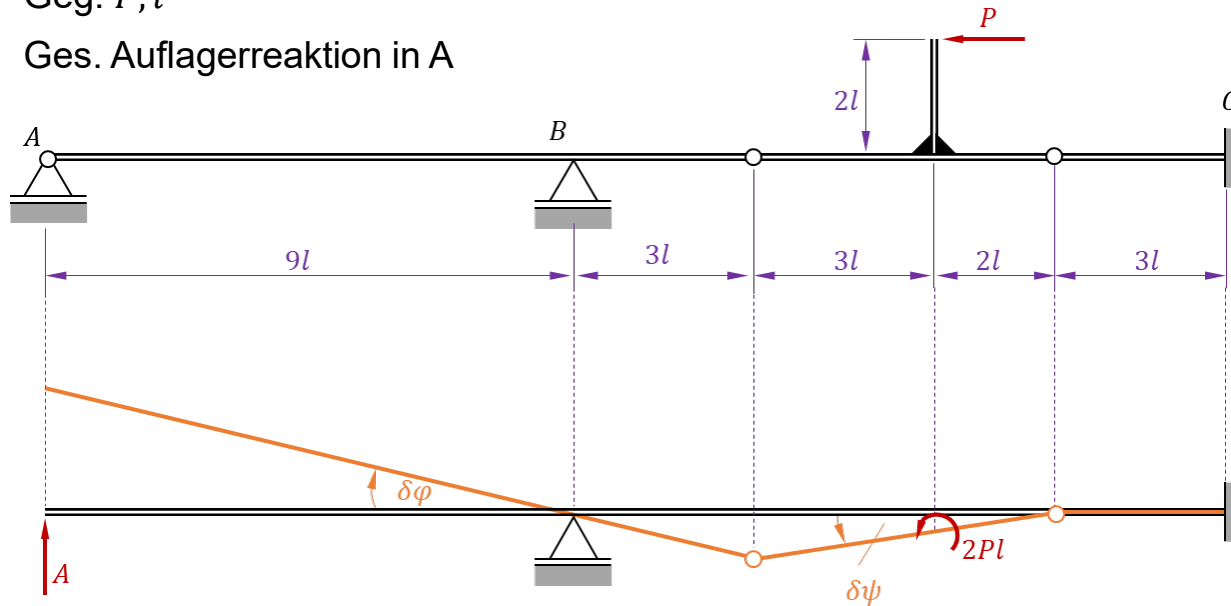
$$\delta A = \left(-\frac{3}{2}M - \frac{6}{5}Pl\right)\delta\varphi = 0$$

$$M = -\frac{4}{5}Pl$$

Bsp. Träger:

Geg. P, l

Ges. Auflagerreaktion in A



$$5l\delta\psi = 3l\delta\varphi$$

$$\delta\psi = \frac{3}{5}\delta\varphi$$

$$\delta A = \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0$$

$$\delta A = 9Al\delta\varphi + 2Pl\frac{3}{5}\delta\varphi = 0$$

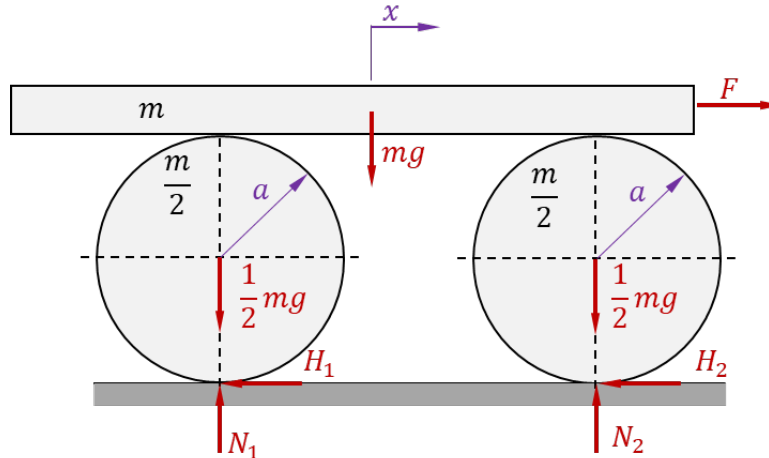
$$\delta A = \left(9A + \frac{6}{5}P\right)l\delta\varphi = 0$$

$$A = -\frac{2}{15}P$$

Bsp. Platte mit zwei Walzen:

Geg. m, a, F reines Rollen

Ges. $\ddot{x}$



Alle Gewichtskräfte sind hier virtuell leistungslos. Die Haftkräfte sind ebenfalls virtuell leistungslos, da sie am Momentanpol angreifen, dessen (virtuelle) Verschiebung im betrachteten Zeitpunkt null ist.

$$\delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} - \sum_{i=1}^n (m_i \underline{a}_{Si} \cdot \delta \underline{r}_{Si} + \underline{\dot{D}}_i \cdot \delta \underline{\alpha}_i) = 0$$

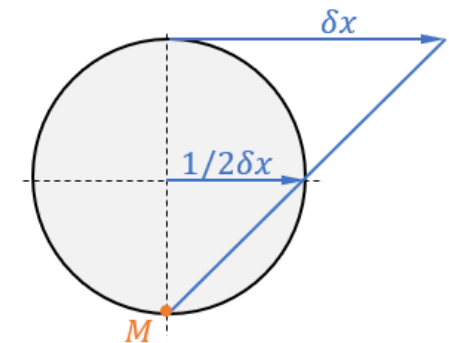
$$\delta A^{(a)} = F \delta x \quad \delta A^{(i)} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Starrkörpersystem}$$

$$F \delta x - \left(m \ddot{x} \delta x + 2 \frac{m}{2} \frac{\ddot{x}}{2} \frac{\delta x}{2} + 2 \frac{1}{4} m a^2 \frac{\ddot{x}}{2a} \frac{\delta x}{2a} \right) = 0$$

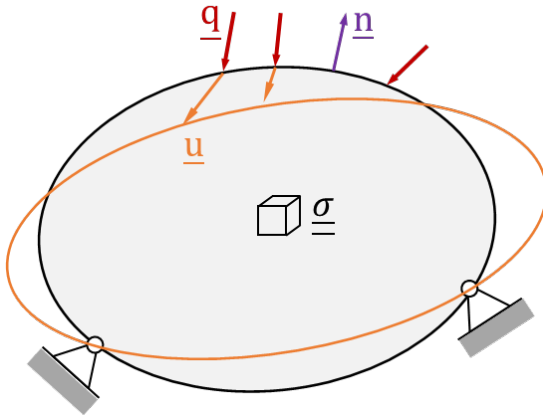
$$\left(F - \frac{8}{11} m \ddot{x} \right) \delta x = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{8F}{11m}$$

Kinematische Verhältnisse:



26.3 Das Prinzip der virtuellen Arbeit für deformierbare Körper



Wir bilden folgendes Integral:

$$\int_S \underline{u} \cdot \underline{q} \, ds = \int_S \underline{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \, ds$$

Am Rand gilt aus Gleichgewichtsgründen

$$\underline{q} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$$

Satz von Gauß:

$$\int_S \underline{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \, ds = \int_V \underline{\nabla} \cdot (\underline{u}^T \underline{\underline{\sigma}}) \, dV$$

Wir wechseln jetzt die Schreibweise und verwenden die Index Notation:

$$\rightarrow = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) \, dV = \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \, dV \quad (*) \quad i, j = x, y, z$$

Einschub: Index Notation

$$u_i \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^3 u_i \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} u_x \sigma_{xx} + u_y \sigma_{yx} + u_z \sigma_{zx} \\ u_x \sigma_{xy} + u_y \sigma_{yy} + u_z \sigma_{zy} \\ u_x \sigma_{xz} + u_y \sigma_{yz} + u_z \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad u_i b_i = u_x b_x + u_y b_y + u_z b_z = \underline{u} \cdot \underline{b}$$

Einsteinsche Summenkonvention über wiederholte Indizes!!

Einbau der Gleichgewichtsbedingungen: $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$ $b_i \dots$ Volumenkräfte

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} - u_i b_i \right) dV \\
 &= \int_V \left\{ \frac{1}{2} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{sym. Tensor}} + \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{antimetrischer Tensor}} \right] \sigma_{ij} - u_i b_i \right\} dV
 \end{aligned}$$

Symmetrischer Tensor „mal“
antimetrischer Tensor ist gleich
null

$$= \int_V (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}) dV - \int_V \underline{u} \cdot \underline{b} dV$$

Es folgt also:

$$\int_S \underline{u} \cdot \underline{q} ds = \int_V (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}) dV - \int_V \underline{u} \cdot \underline{b} dV$$

$$\underbrace{\int_V (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}) dV}_{\text{„Arbeit“ der inneren Kräfte}} = \underbrace{\int_S \underline{u} \cdot \underline{q} ds + \int_V \underline{u} \cdot \underline{b} dV}_{\text{„Arbeit“ der äußeren Kräfte}}$$

„Arbeit“ der inneren
Kräfte

„Arbeit“ der äußeren
Kräfte

Man beachte:

- ist unabhängig vom Materialgesetz!
- $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{b}, \underline{q}$ im Gleichgewicht
- $\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{u}$ kinematisch verträglich

26.3.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für deformierbare Körper

Wir setzen nun in der letzten Zeile der vorigen Folie die Verschiebungen $\underline{u}$ durch virtuelle Verschiebungen $\delta \underline{u}$

$$\int_s \delta \underline{u} \cdot \underline{q} \, ds + \int_V \delta \underline{u} \cdot \underline{b} \, dV = \int_V (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}) \, dV$$

Das kann man alternativ auch so schreiben:

$$\underbrace{\int_s \delta \underline{u}^T \underline{q} \, ds + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{b} \, dV}_{\text{Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte}} = \underbrace{\int_V (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T : \underline{\underline{\sigma}}) \, dV}_{\text{Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte}} \quad \text{Siehe FEM-VO}$$

Man beachte:

- $\delta \underline{u}$ und $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ müssen konsistent (kinematisch möglich) sein
- das führt im allgemeinen auf $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{b}, \underline{q}$ nicht im Gleichgewicht!

26.3.2 Prinzip der virtuellen Kräfte

Prinzip der komplementären virtuellen Arbeit. Nun werden nicht die Verschiebungen bei festgehaltener Zeit variiert, sondern die Kräfte:

$$\int_S \underline{u}^T \delta \underline{q} \, ds + \int_V \underline{u}^T \delta \underline{b} \, dV = \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T : \delta \underline{\underline{\sigma}} \, dV$$

Man beachte:

- $\delta \underline{q}$, $\delta \underline{b}$ und $\delta \underline{\underline{\sigma}}$ müssen statisch möglich, d.h. im Gleichgewicht sein.
- Das führt im allgemeinen auf **inkompatible** $\underline{u}$ und $\underline{\underline{\varepsilon}}$

Spezialisierung: Wir setzen nun voraus, dass die inneren Kräfte ein **Potential** besitzen:

Potential → Verzerrungsenergie ausgedrückt durch Spannungen = **Ergänzungsenergie** U^*

$$\delta A^{(i)} = -\delta U^*$$

Für n Einzelkräfte kann die Arbeit der äußeren Kräfte wie folgt angeschrieben werden:

$$\delta A^{(a)} = \sum_{i=1}^n a_i \delta P_i = \delta U^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \delta P_i$$

Die Wahl von δP_i ist willkürlich, die Gleichung ist daher nur dann zu erfüllen, wenn

$$a_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}$$

Satz von Castigliano

bzw. auch

$$\alpha_i = \frac{\partial U^*}{\partial M_i}$$

Dieser Zusammenhang kann auch zur Generierung zusätzlicher Gleichungen für **statisch unbestimmte** Systeme verwendet werden:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} = 0$$

Satz von Menabrea

$X_i \dots$ statisch unbestimmte Kräfte