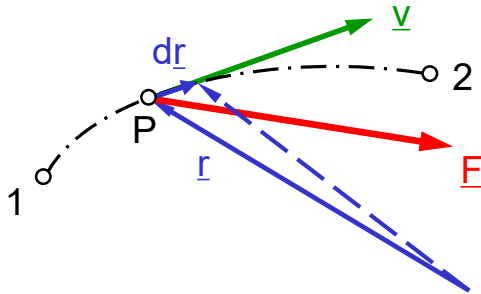


Arbeit, Leistung

Definition **Arbeit**:

$$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$A_{21} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$



A_{21} hängt im allgemeinen vom speziellen Weg von 1 nach 2 ab (außer in Sonderfällen).

$$[A] = [F] \cdot [s] = \text{Nm} = \text{Joule (J)} = \text{Ws}$$

Definition **Leistung**:

$$P = \frac{dA}{dt}$$

Die Leistung ist ein Augenblickswert

$$[P] = [A]/[t] = \text{Nms}^{-1} = \text{Watt (W)}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\underline{F} \cdot d\underline{r}}{dt} = \underline{F} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v}$$

$$P = \underline{F} \cdot \underline{v}$$

Bewegungsenergie = kinetische Energie

zunächst für einen Massenpunkt oder einen rein translatorisch bewegten Starrkörper der Masse m angeschrieben:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad [T] = \text{Nm} = \text{J}$$

$$T = \frac{m}{2}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \right) = \overbrace{m \frac{d\underline{v}}{dt}}^{\underline{F}} \cdot \underline{v}$$

$$\frac{dT}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v} = P$$

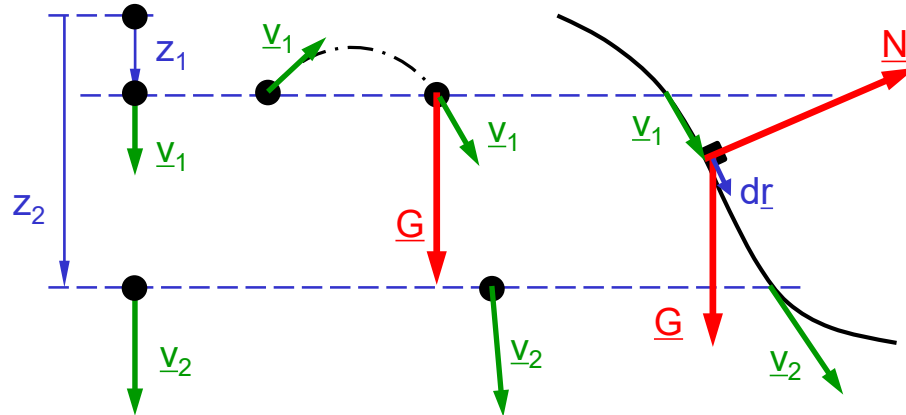
Leistungssatz

$$\frac{dT}{dt} = P = \frac{dA}{dt} \quad \longrightarrow \quad \int_1^2 dT = \int_1^2 dA \quad \longrightarrow \quad T_2 - T_1 = A_{21} \quad \text{Arbeitssatz}$$

Man beachte: A_{21} ist die Arbeit der **physikalischen Kräfte!**
(nicht der Trägheitskräfte oder sonstiger Scheinkräfte)

Bsp: Vergleich freier Fall, schiefer Wurf, reibungsfreie Führung

Eine Punktmasse bewegt sich auf drei verschiedene Arten im Schwerfeld der Erde nach unten. Die Anfangsgeschwindigkeit v_1 sowie die Anfangsposition z_1 seien gegeben.



$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

$$d\underline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix}$$

Die Normalkraft $\underline{N}$ steht normal auf $d\underline{r}$, leistet somit keine Arbeit. Damit gilt in allen 3 Fällen:

Somit lässt sich in allen drei Fällen die Geschwindigkeit v_2 wie folgt berechnen:

$$\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \int_1^2 \underline{G} \cdot d\underline{r} = \int_{z_1}^{z_2} mg dz = mg(z_2 - z_1)$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(z_2 - z_1)$$

Kinetische Energie für beliebige Masseverteilungen

$$T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_m \underline{v} \cdot \underline{v} dm$$

$$P = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \int_v 2\rho \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} dV = \int_v \underline{f} \cdot \underline{v} dV \quad \underline{f} = \rho \frac{d\underline{v}}{dt} \quad \text{Kraftdichte}$$

zur Erinnerung aus Mechanik IB:

$$\underline{f} = \underline{k} + \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z} = \underline{k} + \text{div} \underline{\underline{\sigma}}$$

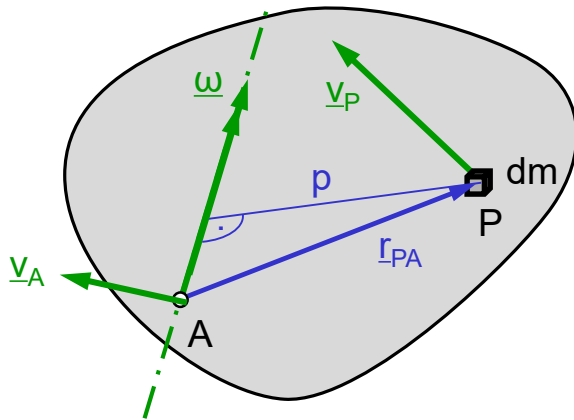
$$P = \frac{dT}{dt} = \int_v \underline{f} \cdot \underline{v} dV = \frac{dA}{dt}$$

Im Unterschied zur Herleitung des Schwerpunktsatzes in Mechanik IB ist es hier nicht möglich, das Volumensintegral mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Oberflächenintegral umzuwandeln. $\Rightarrow$ auch die **inneren Kräfte** spielen in der Leistungsbilanz eine Rolle!

Die zeitliche Änderung der Bewegungsenergie = Arbeit der **äußeren + inneren Kräfte**!

Beim Starrkörper leisten die inneren Kräfte keine Arbeit, da die Abstände der zwischen den Massepunkten konstant bleiben.

Bewegungsenergie des starren Körpers



$$T = \frac{1}{2} \int_m \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p dm \quad \underline{v}_p = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_m [(\underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA})] dm = \\
 &= \frac{1}{2} \int_m \underbrace{\underline{v}_A \cdot \underline{v}_A}_{v_A^2} dm + \frac{1}{2} \int_m 2 \underbrace{\underline{v}_A \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA})}_{(\underline{v}_A \times \underline{\omega}) \cdot \underline{r}_{PA}} dm + \frac{1}{2} \int_m \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA})}_{|\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}|^2 = \omega^2 p^2} dm
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + (\underline{v}_A \times \underline{\omega}) \cdot \underbrace{\int_m \underline{r}_{PA} dm}_{m \underline{r}_{SA}} + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int_m p^2 dm}_{I_{d,A}}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \underbrace{m(\underline{v}_A \times \underline{\omega}) \cdot \underline{r}_{SA}} + \frac{1}{2}I_{d,A}\omega^2$$

→ =0 für

- 1.) $A = 0$, d.h. inertialfest $\rightarrow T = \frac{1}{2}I_{d,0}\omega^2$
- 2.) $A = S$ $\underline{r}_{SA} = \underline{0} \rightarrow T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_{d,S}\omega^2$
- 3.) $\underline{v}_A \parallel \underline{\omega}$ d.h. A ist auf der **Momentanschraubachse**

Für einen allgemeinen Punkt sowie eine Winkelgeschwindigkeit in beliebiger Richtung gilt:

$$\underline{\omega} = \omega_x \underline{e}_x + \omega_y \underline{e}_y + \omega_z \underline{e}_z$$

$$\underline{r}_{PA} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$$

Somit ergibt sich für den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie:

$$I_{d,A} \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \int_m |\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}|^2 dm = \frac{1}{2} \int_m \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}^2 dm = \frac{1}{2} \int_m \left[(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \right] dm =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \omega_x^2 \overbrace{\int_m (y^2 + z^2) dm}^{I_x} + \omega_y^2 \overbrace{\int_m (x^2 + z^2) dm}^{I_y} + \omega_z^2 \overbrace{\int_m (x^2 + y^2) dm}^{I_z} - 2\omega_x \omega_y \overbrace{\int_m xy dm}^{I_{xy}} - 2\omega_y \omega_z \overbrace{\int_m yz dm}^{I_{yz}} - 2\omega_z \omega_x \overbrace{\int_m zx dm}^{I_{zx}} \right\}$$

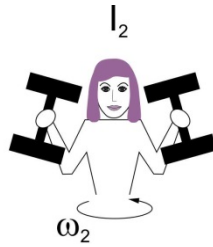
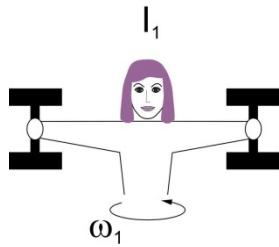
Schlussendlich erhalten wir:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{I}_A \underline{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} [I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2]$$

1,2,3....Trägheitshauptachsen

Bsp: Das klassische Drehschemel Experiment



$$I_1 \geq I_2$$

Drehimpulserhaltung:
$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 \geq \omega_1$$

Kinetische Energie:
$$T_2 = I_2 \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{I_2}{2} \frac{I_1^2}{I_2^2} \omega_1^2 = \underbrace{\frac{I_1}{2} \omega_1^2}_{T_1} \cdot \underbrace{\frac{I_1}{I_2}}_{>1}$$

Energiezunahme:
$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)$$

Die Energie nimmt also zufolge der Arbeit der **inneren Kräfte** zu!

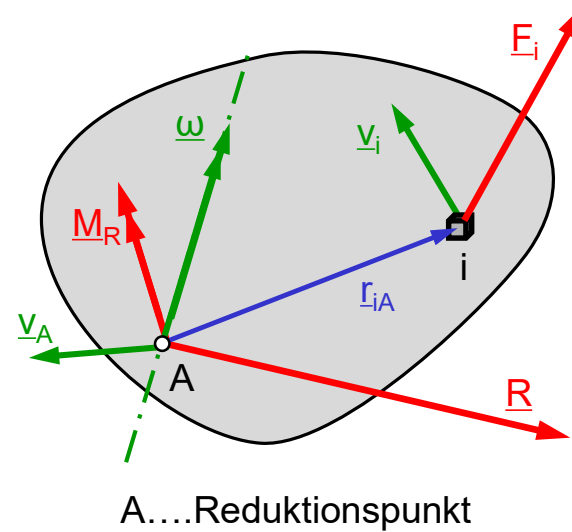
Leistung eines Kraftsystems am Starrkörper

$$\underline{v}_i = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{iA}$$

$$P = \sum \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = \underbrace{\sum \underline{F}_i \cdot \underline{v}_A}_R + \sum \underline{F}_i \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{iA})$$

$$P = \underline{R} \cdot \underline{v}_A + \underbrace{\sum (\underline{r}_{iA} \times \underline{F}_i)}_{\underline{M}_A} \cdot \underline{\omega}$$

$$\underline{P} = \underline{R} \cdot \underline{v}_A + \underline{M}_A \cdot \underline{\omega}$$



Bsp: Masse im rotierenden Rohr (Kraft $S = 0$)

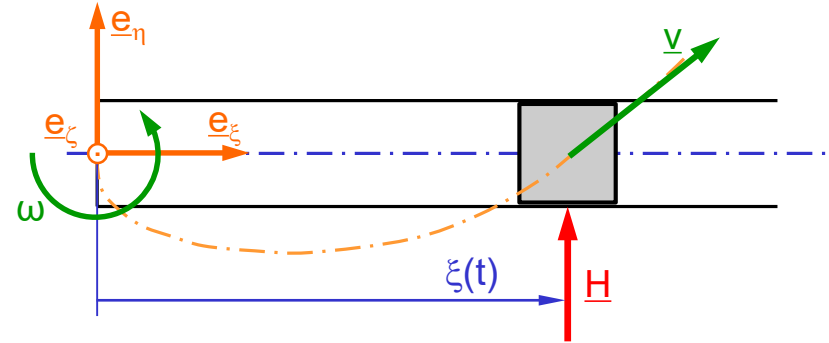
$$m(\ddot{\xi} - \xi\omega^2) = 0$$

zeitfreie Integration: $\dot{\xi} = \omega\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2}$

$$\underline{H} = 2m\omega\dot{\xi}\underline{e}_\eta$$

$$\underline{v} = \dot{\xi}(t)\underline{e}_\xi + \omega\xi(t)\underline{e}_\eta$$

$$P_H = \underline{H} \cdot \underline{v} = 2m\omega^2\xi\dot{\xi} \quad [\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1} = \text{Nms}^{-1} = \text{W}]$$



Probe:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{\xi}^2 + \omega^2 \xi^2]$$

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\xi}\ddot{\xi} + m\omega^2\xi\dot{\xi} = m\dot{\xi}\omega^2\xi + m\dot{\xi}\omega^2\xi = 2m\omega^2\xi\dot{\xi}$$

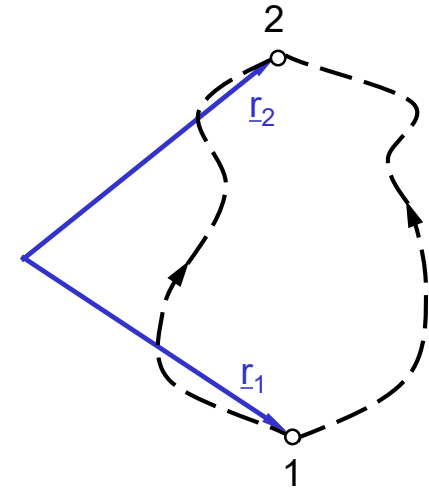
Antriebsleistung des Motors:

$$P_M = M\omega = H\xi\omega = 2m\omega^2\xi\dot{\xi} = 2m\omega^3\xi\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2} \quad [\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{m}^2 = \text{Nms}^{-1} = \text{W}]$$

Potentielle Energie:

Geg.: Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$, nicht abhängig von der Zeit t

Frage: Wie muss $\underline{F}(\underline{r})$ beschaffen sein, damit $A_{21} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$ nur von der Lage von $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$, nicht aber vom spezifischen Integrationsweg abhängt?



$$\underline{F}(\underline{r}) = F_x(x, y, z)\underline{e}_x + F_y(x, y, z)\underline{e}_y + F_z(x, y, z)\underline{e}_z$$

$$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z \quad d\underline{r} = dx\underline{e}_x + dy\underline{e}_y + dz\underline{e}_z$$

Dann ist

$$A_{21} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

nur dann wegunabhängig, wenn es eine eindeutige skalare Funktion $V(x, y, z)$ gibt, sodass

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

↑ 'wegen physikal. Interpretation

Also:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \underline{e}_z \right) = -\text{grad}V = -\nabla V$$

$$\underline{F} = -\text{grad}V = -\nabla V$$

Zur Erinnerung aus der Mathematik, **Nabla Operator**:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

...vektorieller Operator

$$\nabla \cdot \underline{q} = \text{div } \underline{q}$$

$$\nabla \times \underline{q} = \text{rot } \underline{q}$$

Wir bilden nun den Rotor des Kraftfelds:

$$\text{rot } \underline{F} = \nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{e}_x \underbrace{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)}_0 + \underline{e}_y \underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)}_0 + \underline{e}_z \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_0 = \underline{0}$$

Die Klammerausdrücke sind = 0, weil

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{analog für die beiden anderen Kombinationen aus x, y und z.}$$

Offensichtlich gilt für ein derartiges Kraftfeld also

$$\boxed{\text{rot } \underline{F} = \underline{0}} \quad \text{oder} \quad \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

Also:

Wenn zu einem Kraftfeld $\underline{F}(x, y, z)$ eine skalare Funktion $V(x, y, z)$ existiert, sodass $\underline{F} = -\text{grad } V$ erfüllt ist, so nennt man das Kraftfeld **konservativ** und V ist sein **Potential**.

Dann ist:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV$$

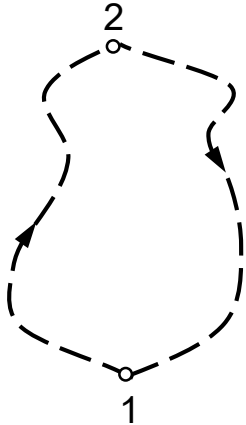
$$\int dA = -\int dV \rightarrow A_{21} = V(\underline{r}_1) - V(\underline{r}_2) = V_1 - V_2$$

Laut Arbeitssatz gilt nun:

$$A_{21} = T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{T_2 + V_2 = T_1 + V_1} \quad \text{Energiesatz}$$

In einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus **kinetischer** und **potentieller** Energie konstant!

Arbeit von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ und auf unterschiedlichem Weg wieder nach $\underline{r}_1$



$$A_{21} = V_1 - V_2$$

$$A_{12} = V_2 - V_1$$

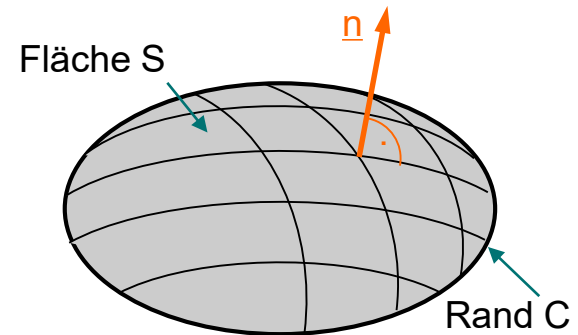
$$A_{21} + A_{12} = 0$$

Allgemein formuliert $\oint_c dA = 0$ entlang eines geschlossenen Weges

$$\oint_c dA = \oint_c \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 = \int_S (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{n} ds \quad \text{Satz von Stokes}$$

$$= 0,$$

wenn das Kraftfeld in Potential besitzt!



- Wenn $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$, dann nennt man das Feld **drehungsfrei**.
- Wenn es gleichzeitig **stationär** (zeitunabhängig) ist, dann ist es **konservativ**.
- Ist das Vektorfeld hingegen **instationär**, dann ist $dV = \frac{\partial V}{\partial \underline{r}} d\underline{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt \neq -dA$. Das Feld ist dann zwar drehungsfrei, aber nicht mehr konservativ. Ein solchen Fall trifft man häufig in der Strömungslehre an.

Weitere Bemerkungen:

- $\text{grad } V \perp V(x, y, z) = \text{const.} \rightarrow -\underline{F} \perp V(x, y, z) = \text{const.}, V(x, y, z) = \text{const.}$ nennt man **Äquipotentialflächen**
- Vorteil der Verwendung von V : Reduktion der Unbekannten von 3 auf 1 (skalare Funktion) $\rightarrow$ nur 1 Differentialgleichung (statt 3 gekoppelte).
- Man überprüft, ob sich für ein gegebenes Kraftfeld ein Potential finden lässt, indem man $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$ prüft.
- Alle Aussagen gelten auch für Kraftdichten $\underline{f}$

Bsp: Homogenes Schwerfeld, $g = \text{const.}$

$$F_x = 0$$

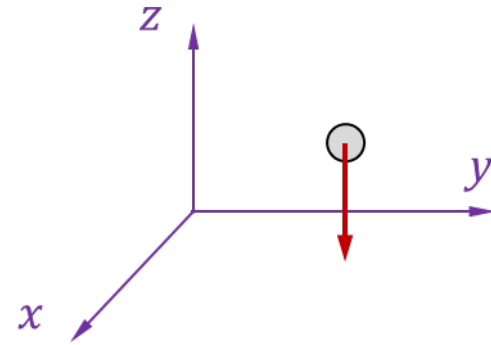
$$F_y = 0$$

$$F_z = -mg = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

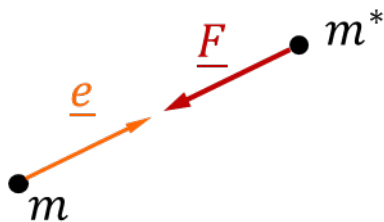
$$V = mgz_S + C$$

→ Kann beliebig gewählt werden

$V = mgz_S$



Bsp: Kugelsymmetrisches Gravitationsfeld (Zentralkraftfeld)



$$\underline{F} = -\kappa \frac{m^* m}{r^2} \underline{e} = -\frac{\partial V}{\partial r} \underline{e}$$

$$\underline{V(r)} = -\kappa \frac{m^* m}{r} + C$$

Bsp: Kraftpotential einer linearen Feder

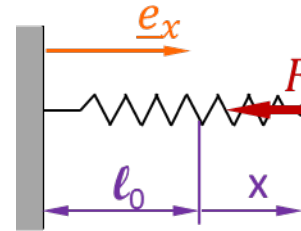
Die Kraft der Feder (Federkonstante c) auf einen daran befestigten Körper ist

$$\underline{F} = -cx \underline{e}_x \quad \underline{r} = x \underline{e}_x$$

$$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$dA = -cx \underline{e}_x \cdot dx \underline{e}_x = -dV$$

$$V = \int cxdx = \frac{1}{2}cx^2 + k$$



$k = 0$ für $x = 0$, also entspannter Feder

$$V = \frac{1}{2}cx^2$$

analog: Kraftpotential einer Drehfeder (Drehfederkonstante c_T)

$$V = \frac{1}{2}c_T\varphi^2$$

Bsp.: System mit einem Freiheitsgrad

Geg.: Reibungsfreies System, $r_1, r_2, I_1, I_2, m, z_0$

Ges.: Bewegungsgleichung $\ddot{z}, \dot{z}$

Der Energiesatz besitzt zwar allgemeine Gültigkeit, liefert aber nur bei Systemen mit einem Freiheitsgrad unmittelbar Lösungen.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \quad m_{red} \dots \text{reduzierte Masse}$$

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} \right) \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m_{red} \dot{z}^2$$

$$V = -mgz + C \quad (\text{z-Achse nach unten})$$

$$\frac{1}{2} m_{red} \dot{z}^2 - mgz + C = 0 - mgz_0 + C$$

$$\dot{z}^2 = \frac{2m}{m_{red}} g(z - z_0) \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$2\dot{z}\ddot{z} = \frac{2m}{m_{red}} g\dot{z} \quad \underline{\ddot{z} = \frac{m}{m_{red}} g}$$

