# 24. Kreiseltheorie

## 24.1 Grundgleichungen

Impuls $\underline{p} = \int_m \underline{v} dm$

Drehimpuls $\underline{D} = \int_m \underline{r} \times \underline{v} dm$

(Drall, Impulsmoment)

…bezogen auf den Ursprung des Inertialsystems

Massenmittelpunkt:

$$m\underline{r}_s = \int \underline{r} dm$$

$$\frac{d}{dt}(m\underline{r}_s) = \frac{d}{dt}\left(\int_m \underline{r} dm\right) = \int_m \frac{d\underline{r}}{dt} dm = \int \underline{v} dm = \underline{p}$$

Für konstante Masse gilt:

$$m\frac{d\underline{r}_s}{dt} = m\underline{v}_s = \underline{p}$$

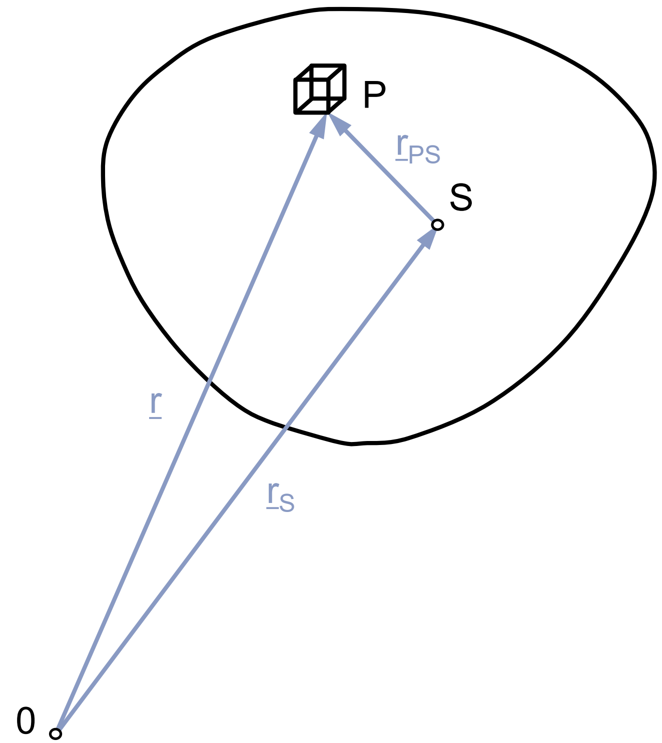
## Drehimpuls

$$\underline{D}_0 = \int_m \underline{r} \times \underline{v}\ dm = \int_m \left[\left(\underline{r}_S + \underline{r}_{PS}\right) \times \left(\underline{v}_s + \underline{v}_{PS}\right)\right] dm =$$

$$= \underline{r}_S \times m\underline{v}_S + \left(\underline{r}_S \times \cancel{\int_m \underline{v}_{PS}\, dm}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\int_m \underline{r}_{PS}\, dm} \times \underline{v}_S\right) + \underbrace{\int_m \left(\underline{r}_{PS} \times \underline{v}_{PS}\right) dm}_{\underline{D}_S}$$

$$\boxed{\underline{D}_0 = \underline{D}_S + \left(\underline{r}_S \times m\underline{v}_S\right)}$$



## Drehimpuls

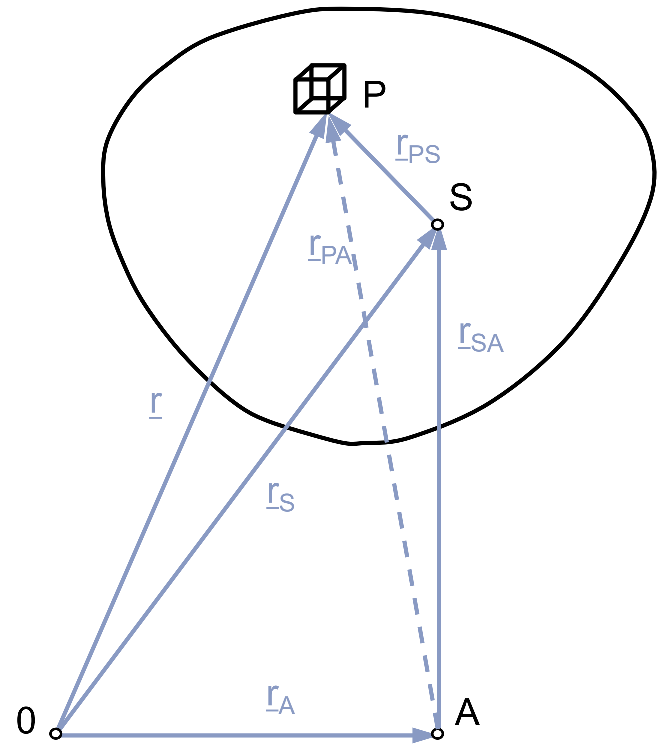
A und S sind fix! (unabhängig von x, y, z)

$$\underline{D}_{\mathrm{A}} = \int_m \underline{r}_{PA} \times \underline{v}_{PA} dm = \int_m [(\underline{r}_{SA} + \underline{r}_{PS}) \times (\underline{v}_{SA} + \underline{v}_{PS})] dm =$$

$$= (\underline{r}_S \times m\underline{v}_{SA}) + \left(\underline{r}_{SA} \times \cancel{\int_m \underline{v}_{PS} dm}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\int_m \underline{r}_{PS} dm} \times \underline{v}_{SA}\right) + \underbrace{\int_m (\underline{r}_{PS} \times \underline{v}_{PS}) dm}_{\underline{D}_S}$$

$$\boxed{\underline{D}_{\mathrm{A}} = \underline{D}_S + (\underline{r}_{SA} \times m\underline{v}_{SA})}$$



**Wiederholung aus Mechanik 1B**

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \quad \rightarrow \quad \boxed{m\underline{a}_s = \underline{F}}$$

Schwerpunktsatz (Voraussetzung: Masse const.)

analog:

$$\boxed{\frac{d\underline{D}_A}{dt} + \underline{r}_{SA} \times m\underline{a}_A = \underline{M}_A}$$

Drallsatz

Für starre Körper gilt: $\underline{D}_A = \underline{\underline{I}}_A\, \underline{\omega}$

$$\begin{pmatrix} D_{Ax} \\ D_{Ay} \\ D_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Absolutwinkelgeschwindigkeit

Trägheitstensor bezüglich A

Ableitung des Drallvektors $\underline{D}_A$ im mit $\underline{\Omega}$ rotierenden Koordinatensystem:

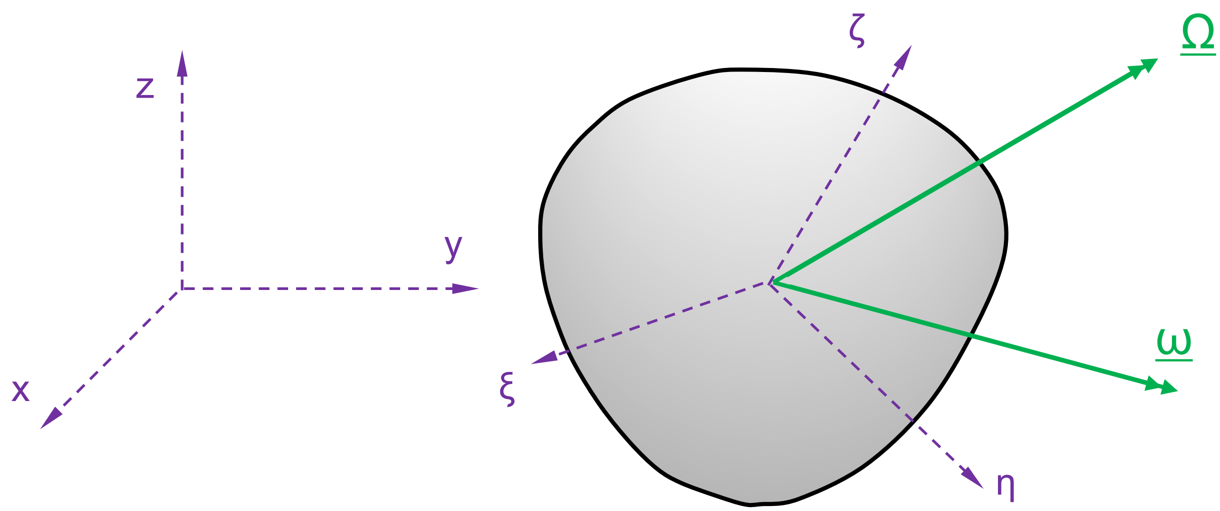
Wir haben bereits folgende Ableitungsvorschrift für einen Vektor $\underline{q}$ im bewegten Koordinatensystem kennengelernt:

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial\underline{q}}{\partial t} + \underline{\Omega} \times \underline{q}$$

Angewandt auf den Drallvektor $\underline{D}_A$ ergibt sich:

$$\boxed{\frac{d\underline{D}_A}{dt} = \frac{\partial\underline{D}_A}{\partial t} + \underline{\Omega} \times \underline{D}_A = \underline{M}_A}$$

(für $A \equiv 0$ oder $A \equiv S$)




$\underline{\Omega}$ Winkelgeschwindigkeit des $\xi\eta\zeta$ -Systems

$\underline{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Achtung: $\underline{\Omega}$ und $\underline{\omega}$ sind Absolutwinkelgeschwindigkeiten (vom System xyz aus gesehen)

# 24.2 Sonderfälle

Wir wählen jetzt $\underline{\omega} = \underline{\Omega}$, d.h. das $\xi\eta\zeta$ – Koordinatensystem ist körperfest mitrotierend.

## 1. Sonderfall:

$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_\zeta$, $A \equiv 0$ oder $A \equiv S$ und Schwerachse rein translatorisch gegen Inertialsystem bewegt.

$$\underline{D}_A = \begin{pmatrix} -I_{\xi\zeta}\omega \\ -I_{\eta\zeta}\omega \\ I_\zeta\ \omega \end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} \times \underline{D}_A = \begin{vmatrix} \underline{e}_\xi & \underline{e}_\eta & \underline{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \omega \\ -I_{\xi\zeta}\omega & -I_{\eta\zeta}\omega & I_\xi\omega \end{vmatrix} = I_{\eta\zeta}\omega^2 \underline{e}_\xi - I_{\xi\zeta}\omega^2 \underline{e}_\eta$$

Eingesetzt in den Drallsatz ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} -I_{\xi\zeta}\dot{\omega} + I_{\eta\zeta}\omega^2 &= M_\xi \\ -I_{\eta\zeta}\dot{\omega} - I_{\xi\zeta}\omega^2 &= M_\eta \\ I_\zeta\dot{\omega} &= M_\zeta \end{aligned}}$$

**2. Sonderfall:**

Das $\xi\eta\zeta$ – Koordinatensystem ist ein Trägheitshauptachsensystem 123 ($A \equiv 0$, oder $A \equiv S$), ansonsten beliebige Bewegung

$$\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3$$

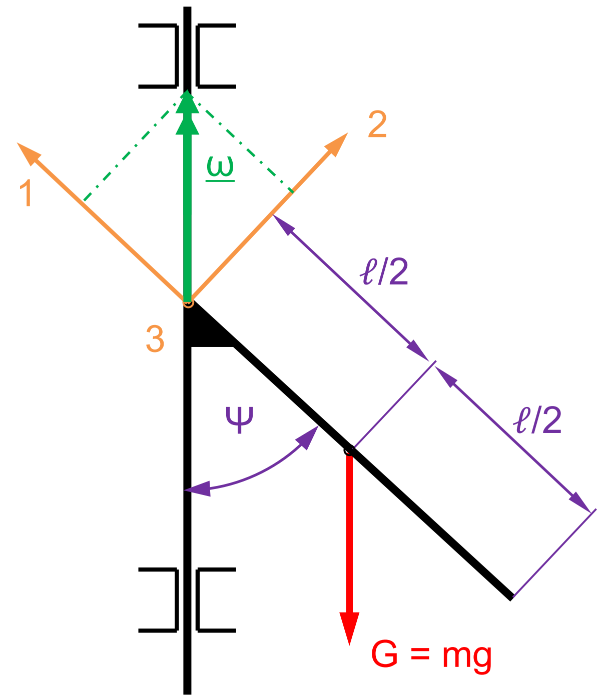
$$\underline{D}_A = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\omega} \times \underline{D}_A = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned}}$$

Eulersche Kreiselgleichungen

**Beispiel**

geg: homogener Stab, $m, \ell, \psi, \omega, \dot{\omega}$
ges: Einspannmoment $\underline{M_E}$ in 0.




Euler'sche Kreiselgleichungen:

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = M_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = M_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = M_3$$

Winkelgeschwindigkeiten:

$$\omega_1 = \omega \cos\psi \rightarrow \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}\cos\psi$$
$$\omega_2 = \omega \sin\psi \rightarrow \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}\sin\psi$$
$$\omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_3 = 0$$

Einsetzen in Kreiselgleichungen liefert:

$$I_1\dot{\omega}\cos\psi = M_{E,1}$$
$$I_2\dot{\omega}\sin\psi = M_{E,2}$$
$$-(I_1 - I_2)\omega^2 \sin\psi\cos\psi = M_{E,3} + G\frac{\ell}{2}\sin\psi \rightarrow M_{E,3} = -G\frac{\ell}{2}\sin\psi + (I_2 - I_1)\omega^2 \sin\psi\cos\psi$$

für dünnen Stab: $I_1 = 0, I_2 = I_3 = \frac{1}{3}m\ell^2, \dot{\omega} = 0 \rightarrow \underline{M_{E,3} = -m\ell\sin\psi\left(\frac{1}{3}\ell\omega^2\cos\psi - \frac{1}{2}g\right)}$

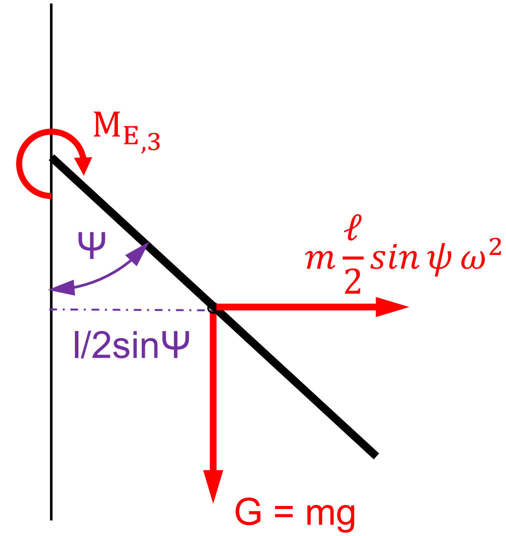
**ACHTUNG!**

Berechnung des Einspannmoments über die „Fliehkraft“:

$$M_{E,3} + mg\frac{\ell}{2}\sin\psi - m\frac{\ell}{2}\omega^2\sin\psi\frac{\ell}{2}\cos\psi = 0$$

$$\cancel{M_{E,3} = m\ell\sin\psi\left(\frac{1}{4}\ell\omega^2\cos\psi - \frac{1}{2}g\right)}$$

**FALSCH!**

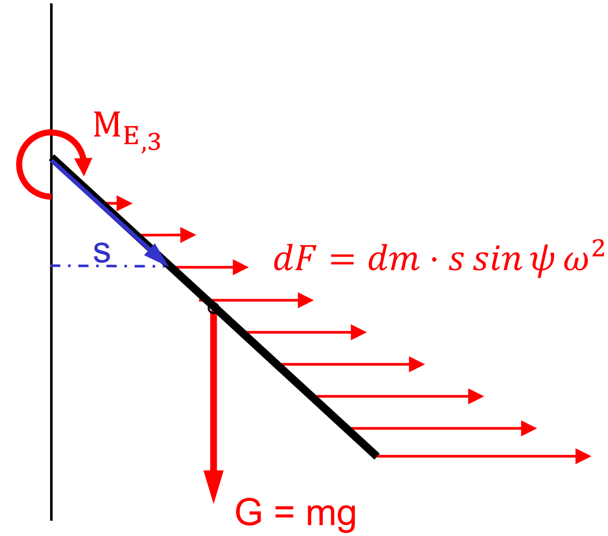



Bei dieser Methode ist zu berücksichtigen, dass die Trägheitskräfte verteilt sind:

$$dm = \frac{m}{\ell}ds$$

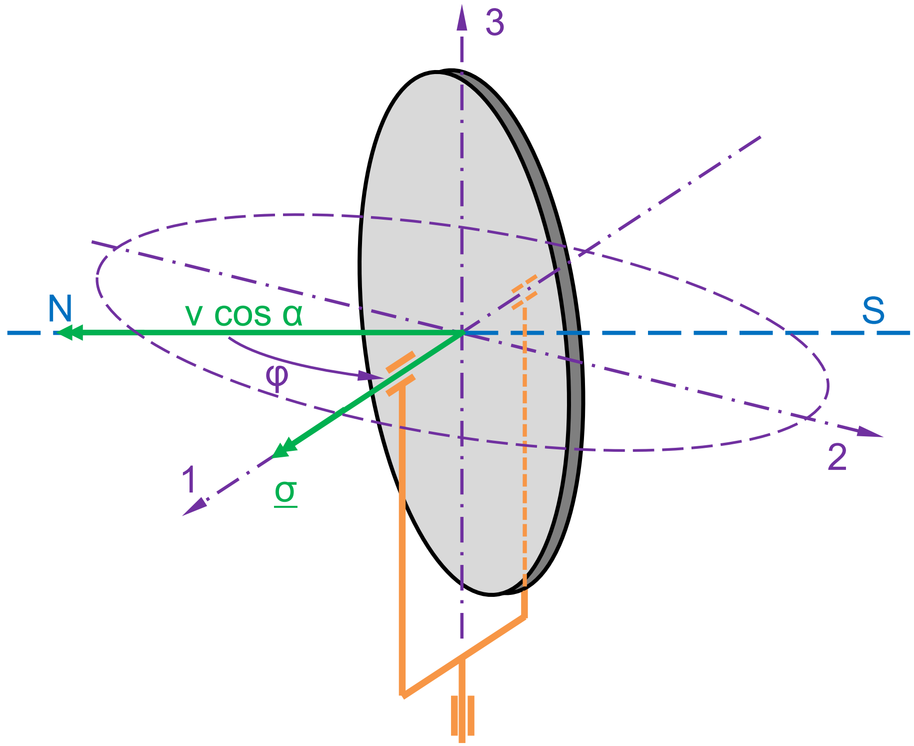
$$M_{E,3} + mg\frac{\ell}{2}\sin\psi - \int_0^{\ell}\frac{m}{\ell}s\cdot\sin\psi\,\omega^2\cdot s\cos\psi\,ds = 0$$

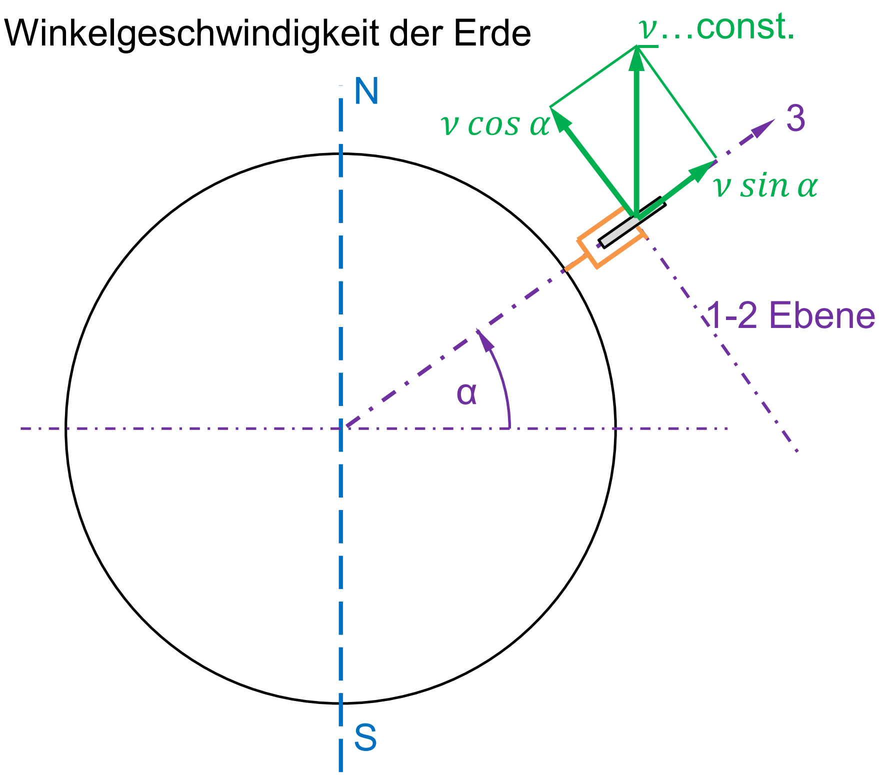
$$\underline{M_{E,3} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\psi + \frac{m}{\ell}\sin\psi\cos\psi\,\omega^2\frac{\ell^3}{3}}$$



## 24.3 Kreiselkompass

$\underline{\nu} = const$ .... Winkelgeschwindigkeit der Erde

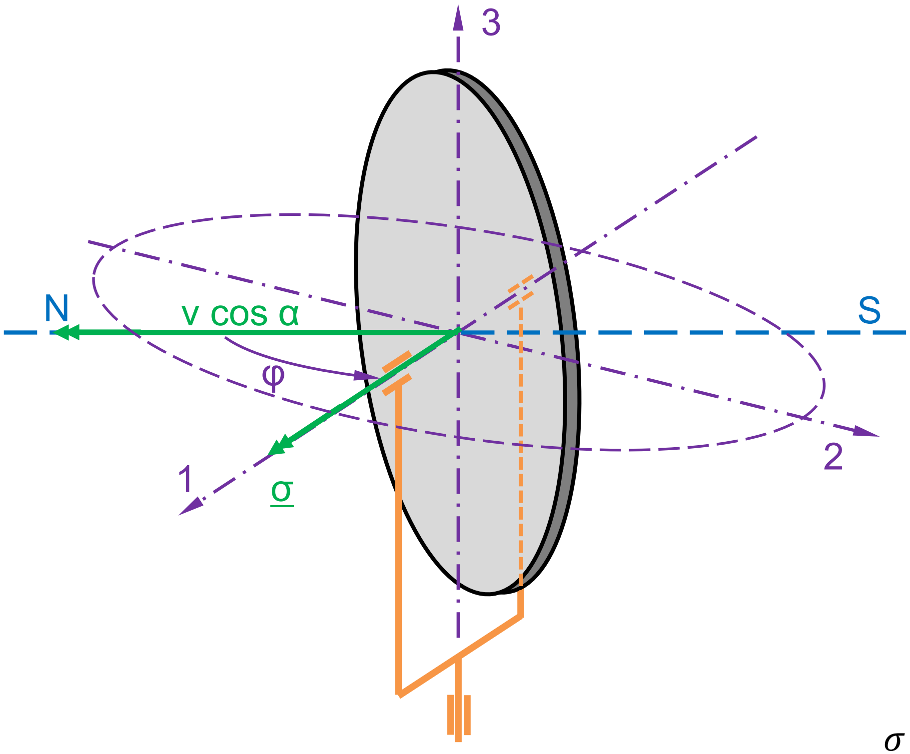



Das Koordinatensystem ist nicht völlig fest mit dem Körper verbunden

$I_2 = I_3 \rightarrow$ symmetrischer Kreisel, 1 – Achse: Figurenachse

# 24.3 Kreiselkompass




Winkelgeschwindigkeit des 1,2,3-KS $\underline{\Omega}$:

$$\underline{\Omega} = \underline{\nu} + \underline{\dot{\varphi}}$$

$\underline{\nu} = const$ .... Erddrehung

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \nu \cos\alpha \cos\varphi \\ \Omega_2 &= -\nu \cos\alpha \sin\varphi \\ \Omega_3 &= \nu \sin\alpha + \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (^*)$$

(Absolut)-Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ des Kreisels:

$$\omega_1 = \Omega_1 + \sigma$$

$$\omega_2 = \Omega_2$$

$$\omega_3 = \Omega_3$$

$\sigma$ ... relative Winkelgeschwindigkeit des Kreisels, relativ zur Lagerung (Gabel)

Geg.: $\sigma$ = const.

$$\omega_1 = \Omega_1 + \sigma$$

$$\omega_2 = \Omega_2$$

$$\omega_3 = \Omega_3$$

Der Drallvektor, bezogen auf den Schwerpunkt lautet:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_2\omega_3 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \begin{bmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_2\dot{\omega}_3 \end{bmatrix}$$

Der Drallsatz, angeschrieben im (bewegten) 1,2,3 Koordinatensystem liefert:

$$\frac{d\underline{D}}{dt} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \Omega \times \underline{D} = \begin{bmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 - \sigma \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_2\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1\dot{\omega}_1 = M_1 \qquad (1)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + [I_1\omega_1 - I_2(\omega_1 - \sigma)]\omega_3 = M_2 \qquad (2)$$

$$I_2\dot{\omega}_3 - [I_1\omega_1 - I_2(\omega_1 - \sigma)]\omega_2 = M_3 \qquad (3)$$

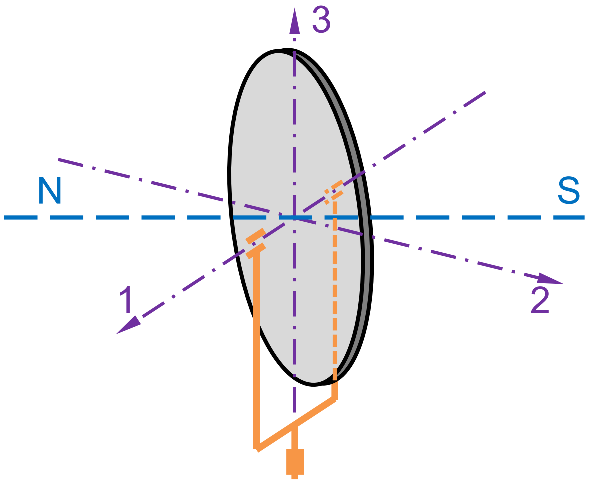
Die Kreisellagerung erlaubt nur eine Momenten-Komponente in 2-Richtung:

$M_2 = M \qquad M_1 = M_3 = 0$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \qquad (1)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + [I_1 \omega_1 - I_2(\omega_1 - \sigma)]\omega_3 = M \qquad (2)$$

$$I_2 \dot{\omega}_3 - [I_1 \omega_1 - I_2(\omega_1 - \sigma)]\omega_2 = 0 \qquad (3)$$




Laut (*) gilt: $\omega_3 = \nu \sin\alpha + \dot{\varphi} \;\rightarrow\; \dot{\omega}_3 = \ddot{\varphi}$

aus (3):

$$\ddot{\varphi} + \frac{I_1}{I_2}(\nu^2 \cos^2\alpha \cos\varphi \sin\varphi + \nu\sigma \cos\alpha \sin\varphi) - \nu^2 \cos^2\alpha \sin\varphi \cos\varphi = 0$$

Im Vergleich zu $\sigma$ ist $\nu$ sehr klein → $\nu^2 \approx 0$

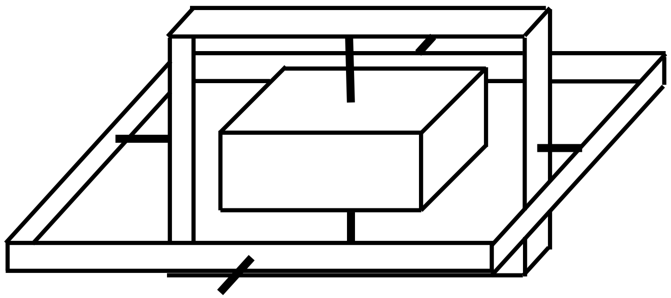
$$\ddot{\varphi} + \frac{I_1}{I_2}\underbrace{\nu\sigma \cos\alpha}_{p^2} \sin\varphi = 0 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \frac{I_1}{I_2} p^2 \sin\varphi = 0$$

- Entspricht einer Pendelschwingung mit der Gleichgewichtslage $\varphi$ = 0 (Die Figurenachse schwingt bei Auslenkung um die Gleichgewichtslage)
- Bei zusätzlicher Dämpfung kehrt die Figurenachse nach einigen Pendelungen in die Nord-Süd-Lage zurück → Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus von $\underline{\nu}$ und $\underline{\sigma}$

## 24.4 Stabilität eines momentenfreien, dreiachsigen Kreisels

momentenfrei … es wirken keine äußeren Momente auf den Kreisel ein. Das kann z.B. durch kardanische Lagerung des Kreisels bewerkstelligt werden, siehe nachstehende Abbildung.

dreiachsig … $I_1 \neq I_2 \neq I_3$



Eulersche Kreiselgleichungen:

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

→ eine mögliche Lösung wäre: $\omega_1 = const., \ \omega_2 = \omega_3 = 0$

Störungsrechnung oder Methode der kleinen Störungen:

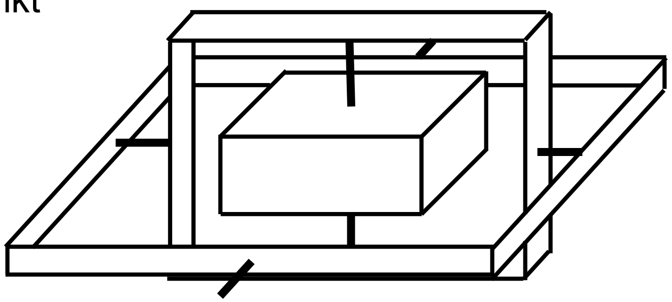
Der Bewegungszustand (Grundbewegung) ist stabil, wenn nach der Störung die Amplitude der sich einstellenden Bewegung beschränkt bleibt.

Momentenfreier Kreisel, der um die 1-Achse mit $\omega$ = const. rotiert und die Störung durch ε, λ und μ erhält:

$\omega_1 = \omega + \varepsilon$ $\omega_2 = \lambda$ $\omega_3 = \mu$ $\varepsilon, \lambda, \mu$ … klein

$$I_1 \dot{\varepsilon} - (I_2 - I_3) \overbrace{\lambda \mu}^{\sim 0} = 0 \longrightarrow \varepsilon = const \text{ und beschränkt}$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 \dot{\lambda} - (I_3 - I_1)\mu(\omega + \varepsilon) = 0 \\ I_3 \dot{\mu} - (I_1 - I_2)(\omega + \varepsilon)\lambda = 0 \end{aligned}\right\}$$



$$\ddot{\lambda} + \underbrace{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)\omega^2}{I_2 I_3}}_{-\rho^2} \lambda = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mu} + \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)\omega^2}{I_2 I_3} \mu = 0$$

$$\ddot{\lambda} + \underbrace{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)\omega^2}{I_2 I_3}}_{-p^2}\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\lambda} - p^2\lambda = 0$$

$$\ddot{\mu} + \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)\omega^2}{I_2 I_3}\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\mu} - p^2\mu = 0$$

Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt} \\ \mu &= B_1 e^{pt} + B_2 e^{-pt} \end{aligned}\right\}$$ → $\lambda$ und $\mu$ bleiben <u>beschränkt</u>, wenn $p^2 \leq 0$, d.h. p imaginär ist

$$p^2 = -\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)\omega^2}{I_2 I_3} < 0$$ → Ist dann erfüllt, wenn $I_1$ entweder $I_{min}$ oder $I_{max}$ ist

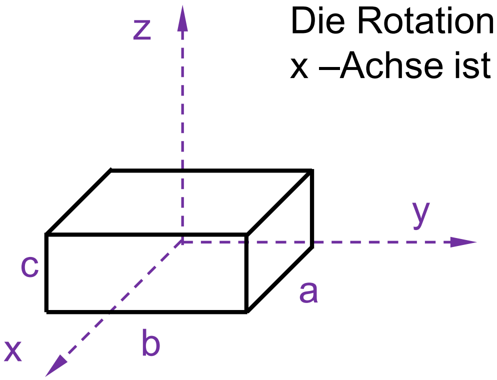
Für $I_{min} \leq I_1 \leq I_{max}$ ist der Kreisel instabil!

Für einen Quader mit $\mathrm{b} > a > c$ gilt beispielsweise:

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2) = I_{min}$$

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = I_{max}$$




Die Rotation um die x –Achse ist instabil!