Wärmeleitproblem

I. Sei $f > 0, c = \gamma^2 > 0$ und für Innen

$$F_i(s) = \frac{\rho}{s} + \frac{1}{s}\frac{f\big(1+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{s}}\big)\big(e^{-(1+\rho)\sqrt{s}} - e^{-(1-\rho)\sqrt{s}}\big)}{\big[(\sqrt{c}+f)-(1-f)\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{s}}\big] + \big[(\sqrt{c}-f)+(1-f)\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{s}}\big]e^{-2\sqrt{s}}}$$
$$= \frac{1}{s}\Big(\rho + \Phi(\rho,\sqrt{s})\Big),$$

worin

$$\Phi(\rho,s) = \frac{f\big(1+\frac{\gamma}{s}\big)\sinh\rho s}{\big[(1-f)\frac{\gamma}{s} - f\big]\sinh s - \gamma\cosh s}, \quad 0 < \rho \le 1\,.$$

Analog für Außen:

$$F_a(s) = \frac{e^{-\frac{\rho-1}{\sqrt{c}}\sqrt{s}}}{s} + \frac{1}{s}\frac{f\big(1+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{s}}\big)\big[e^{-\frac{\rho+2\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}}\sqrt{s}} - e^{-\frac{\rho-1}{\sqrt{c}}\sqrt{s}}\big]}{\big[(\sqrt{c}+f)-(1-f)\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{s}}\big]+\big[(\sqrt{c}-f)+(1-f)\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{s}}\big]e^{-2\sqrt{s}}}$$
$$= \frac{e^{-\frac{\rho-1}{\sqrt{c}}\sqrt{s}}}{s}\Big(1+\Phi(1,\sqrt{s})\Big), \quad \rho \ge 1\,.$$

II. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine reguläre Distribution, die nicht stärker als exponentiell wächst, für welche also eine positive Zahl α existiert, sodaß $|f(t)| \le e^{\alpha t}$ für $t > t_o$ gilt, so ist ihre Laplace-Transformierte

$$F(s) = \mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

eine in der Halbebene $\Re s > \alpha$ analytische Funktion, für welche die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \tag{1}$$

besteht. Das Infimum α_o aller Zahlen α, für welche die obige Ungleichung $|f(t)|e^{-\alpha t} \le 1$ für hinreichend großes t Bestand hat, heißt die Konvergenzabszisse; die Laplace-Transformierte $F(s) = \mathcal{L}f(t)$ ist dann analytisch in der Konvergenzhalbebene $\Re s > \alpha_o$.

Beweis: Aus der Ungleichung $|f(t)| \le e^{\alpha t}$ folgt $|f(t)|e^{-\alpha t} \le 1$ und

$$|F(s+\alpha)| \le \Big|\int_0^\infty e^{-st}f(t)e^{-\alpha t}dt\Big| \le \Big|\int_0^\infty |e^{-st}|dt\Big| = \frac{1}{|\Re s|} < \varepsilon,\ |s| \ge |\Re s| > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Erfüllt demnach auch die Ableitung $f'(t)$ die obigen Bedingungen, so ergibt sich aus

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}f'(t) = sF(s) - f(0+) = 0$$

der sogenannte Anfangswertsatz

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)\,, \tag{2}$$

sofern beide Grenzwerte existieren. Ebenso folgt aus

$$sF(s) - f(0+) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

Grenzübergang $s \to 0$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) - f(0+) = \lim_{s\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \int\limits_0^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0+)$$

der Endwertsatz

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)\,, \tag{3}$$

wobei auch hier die Existenz der Grenzwerte Voraussetzung ist.

III. Es läuft also alles auf die Rücktransformation von

$$\Psi(s) = \frac{f(s+\gamma)}{\big[(1-f)\gamma - sf\big]\sinh s - s\gamma\cosh s} \tag{4}$$

hinaus, wobei sich der Residuensatz (u.U. auch Laguerre-Technik) anbietet. Mit den Setzungen (für $f \neq 1$ und $f \neq \gamma$)

$$\lambda = \frac{f+\gamma}{(1-f)\gamma}\,, \quad \mu = \frac{f-\gamma}{(1-f)\gamma}\,, \tag{5}$$

beziehungsweise

$$f = \frac{\lambda-\mu-2}{\lambda-\mu}\,, \quad \gamma = \frac{\lambda-\mu-2}{\lambda+\mu}\,, \tag{6}$$

wobei $\lambda \neq \mu, \mu \neq 0$, und

$$z = \frac{1-\lambda s}{1-\mu s} = \frac{q(s)}{p(s)} \tag{7}$$

worin

$$\begin{aligned} p(s) &= 1 - \mu s, \\ q(s) &= 1 - \lambda s, \end{aligned} \tag{8}$$

wird einerseits

$$p(s) + q(s) = (1-\mu s) + (1-\lambda s) = 2 - s(\lambda+\mu) = 2\Big(1 - s\frac{f}{(1-f)\gamma}\Big)\,,$$

also

$$(1-f)\gamma - fs = \frac{(1-f)\gamma}{2}\big[p(s)+q(s)\big]\,,$$

andererseits

$$p(s) - q(s) = (1-\mu s) - (1-\lambda s) = s(\lambda-\mu) = s\frac{2\gamma}{(1-f)\gamma}\,,$$

somit

$$\gamma s = \frac{(1-f)\gamma}{2}\big[p(s) - q(s)\big]\,,$$

sodaß

$$\begin{aligned}&\big[(1-f)\gamma - sf\big]\sinh s - \gamma s\cosh s\\ &\qquad = \frac{(1-f)\gamma}{2}\big([p(s)+q(s)]\sinh s - [p(s) - q(s)\cosh s\big)\end{aligned}$$

und schließlich wegen $\frac{2f}{(1-f)\gamma} = \lambda + \mu$, $\frac{2f}{1-f} = \lambda - \mu - 2$

$$\begin{aligned}\Psi(s) &= \frac{2f(s+\gamma)}{(1-f)\gamma\big([p(s)+q(s)]\sinh s - [p(s)-q(s)]\cosh s\big)}\\ &= \frac{(\lambda+\mu)s + (\lambda-\mu-2)}{e^s q(s) - e^{-s}p(s)}\,,\end{aligned} \tag{9}$$

beziehungsweise

$$\Phi(\rho, s) = \Psi(s)\sinh \rho s\,. \tag{10}$$

In (9) bzw. (10) sind der Zähler wie der Nenner ganze Funktionen, sodaß der Quotient meromorph ist: sowohl der Zähler als auch der Nenner

$$N(s) = e^s(1-\lambda s) - e^{-s}(1-\mu s) \tag{11}$$

haben eine beständig konvergente Entwicklung. Die Ableitung des Nenners ist darin, wenn s_o eine Nullstelle des Nenners ist (wenn also $e^{s_o}q(s_o) = e^{-s_o}p(s_o)$)

$N'(s_o) = e^s(1-\lambda-\lambda s_o) + e^{-s}(1+\mu-\mu s_o) = e^{-s_o}\big[2(1-\mu s_o) + \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda s_o}\big] \neq 0$;

das Residuum der Funktion $\Psi(s)$ in $s = s_o \neq 0$ ist daher

$$\operatorname*{Res}_{s=s_o} \Psi(s) = \frac{(\lambda+\mu)s_o + (\lambda-\mu-2)}{e^{s_o}(1-\lambda-\lambda s_o) + e^{-s_o}(1+\mu-\mu s_o)} \tag{12}$$

und jenes der Funktion $\Phi(\rho, s)$

$$\operatorname*{Res}_{s=s_o} \Phi(\rho, s) = \sinh \rho s_0 \operatorname*{Res}_{s=s_o} \Psi(s)\,, \tag{13}$$

sofern $s_o \neq i\frac{k\pi}{\rho}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $s_o = 0$ ist $N'(0) = 2 + \mu - \lambda$ und daher $\operatorname*{Res}_{s=0}\Psi(s) = \frac{\lambda-\mu-2}{2+\mu-\lambda} = -1 \neq 0$, also $\operatorname*{Res}_{s=0}\Phi(\rho,s) = 0$. Die jedenfalls vorhandene Nullstelle $s = 0$ des Nenners $N(s)$ hat keinen Einfluß auf die Rücktransformation von $\Phi(\rho, s)$ mittels des Residuensatzes. **IV.** Sei formal mit den Nullstellen $s_n = x_n + i\omega_n$ des Nenners in $\Psi(s)$ mit $\omega_n > 0$ und den zugehörigen Residuen $r_n = \operatorname*{Res}_{s=s_n} \Psi(s)$

$$\begin{aligned}\varphi(\rho, t) = \mathcal{L}^{-1}\Phi(\rho, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \rho s_n r_n e^{s_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \rho \bar{s}_n \bar{r}_n e^{\bar{s}_n t}\\ &= 2\,\Re\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n \sinh \rho s_n e^{s_n t}\Big)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Unterwirft man $\varphi(\rho,t)$ der linearen Transformation[1]

$$[\mathcal{T}f(\tau)](t) := \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)d\tau\,, \tag{15}$$

so folgt mit[2] $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$

$$[\mathcal{T}e^{s\tau}](t) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} e^{s\tau}d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + s e^{s^2 t}\operatorname{erfc}(-s\sqrt{t})\,. \tag{16}$$

Durch formales Vertauschen $\mathcal{T}\sum = \sum\mathcal{T}$, $\mathcal{T}\Re = \Re\mathcal{T}$ folgt für

$$\begin{aligned}[\mathcal{T}\varphi(\rho,\tau)](t) &= 2\,\Re\sum_{n=1}^\infty r_n \sinh\rho s_n[\mathcal{T}e^{s_n\tau}](t)\\ &= 2\Re\sum_{n=1}^\infty r_n\sinh\rho s_n\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + s_n e^{s_n^2 t}\operatorname{erfc}(-s_n\sqrt{t})\Big]\,. \end{aligned}\tag{17}$$

Damit ist

$$\mathcal{L}\big[\mathcal{T}\varphi(\rho,\tau)\big](t) = \Phi(\rho,\sqrt{s}) \tag{18}$$

und mit[3]

$$\int\limits_0^t [\mathcal{T}e^{s_n\tau}](t')dt' = \tfrac{1}{s}\big[e^{s^2 t}\operatorname{erfc}(-s\sqrt{t}) - 1\big] \tag{19}$$

bzw. der Korrespondenz

$$\mathcal{L}\int\limits_0^t [\mathcal{T}\varphi(\rho,\tau)](t')dt' = \tfrac{1}{s}\Phi(\rho,\sqrt{s})$$

am Ende

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t [\mathcal{T}\varphi(\rho,\tau)](t')dt' &= 2\Re\sum_{n=1}^\infty r_n\sinh\rho s_n\int\limits_0^t [\mathcal{T}e^{s_n\tau}](t')dt'\\ &= 2\Re\sum_{n=1}^\infty \frac{r_n}{s_n}\sinh\rho s_n\big[e^{s_n^2 t}\operatorname{erfc}(-s_n\sqrt{t}) - 1\big]\,. \end{aligned}\tag{20}$$

sodaß schließlich (für $t \ge 0$)

$$f_i(t) = \rho - 2\Re\sum_{n=1}^\infty \frac{r_n}{s_n}\sinh\rho s_n + 2\Re\sum_{n=1}^\infty \sinh\rho s_n\frac{r_n}{s_n}e^{s_n^2 t}\operatorname{erfc}(-s_n\sqrt{t})\,. \tag{21}$$

Für $t \to 0+$ ergibt sich der Grenzwert

$$f_i(0+) = \rho\,. \tag{22}$$

[1] S. File „`Integral.tex`“, die Fußnote auf S. 1.
[2] S. Gl. (29) im File „`Integral.tex`“.
[3] S. die Gl. (31) in „`Integral.tex`“.

V. Zur Rücktransformation von $F_a(\rho, s) = \frac{1}{s}e^{-\rho'\sqrt{s}}[1 + \Phi(\rho, \sqrt{s})]$ seien folgende Hilfssätze vorausgeschickt:

Hilfssatz 1: Für $\alpha > 0$ ist

$$\mathcal{L}^{-1}e^{-\alpha\sqrt{s}} = \frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} = \mathcal{T}\delta(t-\alpha) \tag{23}$$

und

$$\mathcal{L}^{-1}\tfrac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} = \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\big)\,. \tag{24}$$

Beweis für (23): Für $\alpha > 0$ ist $\mathcal{L}\delta(t-\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\delta(t-\alpha)dt = e^{-\alpha s}$ und daher

$$e^{-\alpha\sqrt{s}} = \mathcal{L}\mathcal{T}\delta(t-\alpha) = \mathcal{L}\Big(\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\delta(\tau-\alpha)d\tau\Big) = \frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\,.$$

Beweis für (24): Aus (23) folgt nun

$$\mathcal{L}^{-1}e^{-\alpha\sqrt{s}} = \frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$$

und weiter mit der Substitution $x = \frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}$ in

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s} = \alpha\int\limits_0^t \frac{1}{2\tau\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}}d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-x^2}dx = \operatorname{erfc}\Big(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\Big)\,.$$

Hilfssatz 2: Es gilt für $\alpha > 0$ und $s \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}^{-1}\big[e^{-\alpha\sqrt{s}}\mathcal{L}\big(e^{s_n^2 t}\operatorname{erfc}(-s_n\sqrt{t}) + \tfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\big)\big] = e^{-s\alpha}\mathcal{T}e^{st}\,. \tag{25}$$

Beweis: Es gilt mit dem obigen Hilfssatz 1 zusammen mit Hilfssatz 2, Satz 5[4]und der Formel $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}f\mathcal{L}g] = f * g = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$$\mathcal{L}^{-1}\big[e^{-\alpha\sqrt{s}}\big(\mathcal{L}e^{s^2t}\operatorname{erfc}(-s\sqrt{t}) + \tfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\big)\big] = \mathcal{L}^{-1}\big[\mathcal{L}\mathcal{T}\delta(t-\alpha)\mathcal{L}\mathcal{T}e^{st}\big]$$

$$= \mathcal{T}\big[\delta(t-\alpha) * e^{st}\big] = \mathcal{T}\int\limits_0^t \delta(\tau-\alpha)e^{s(t-\tau)}d\tau = \mathcal{T}e^{s(t-\alpha)} = e^{-s\alpha}\mathcal{T}e^{st}\,.$$

Hilfssatz 3: Es gilt[5] für $s \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_0^t [\mathcal{T}e^{st'}](\tau)d\tau = \frac{1}{s}\Big(e^{s^2t}\operatorname{erfc}(-s\sqrt{t}) - 1\Big)\,. \tag{26}$$

[4] Im File „`Integral.tex`“
[5] S. die Formel (31) im File „`Integral.tex`“

Damit wird mit den Setzungen $\rho' = \frac{\rho-1}{\gamma} \geq 0$ (für $\rho \geq 1$) und $r_n = \operatorname*{Res}_{s=s_n} \Psi(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\big[e^{-\rho'\sqrt{s}}\big(1+\Phi(1,\sqrt{s})\big)\big] &= \mathcal{L}^{-1}\big[\mathcal{L}\mathcal{T}\delta(t-\rho')\mathcal{L}[\delta(t)+\mathcal{T}\varphi(1,t)]\big]\\ &= \mathcal{T}\delta(t-\rho') + \mathcal{T}\big[\delta(t-\rho') * \varphi(1,t)\big]\,.\end{aligned}$$

Mit $\delta(t-\rho') * e^{s_n t} = \int\limits_0^t \delta(\tau-\rho')e^{s_n(t-\tau)}d\tau = e^{-\rho' s_n}e^{s_n t}$ wird

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\big[\delta(t-\rho') * \varphi(1,t)\big] &= \mathcal{T}\Big[\delta(t-\rho') * 2\Re\sum_{n=1}^{\infty} r_n \sinh s_n e^{s_n t}\Big]\\ &= 2\Re\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{T}\big[\delta(t-\rho') * e^{s_n t}\big] = 2\Re\sum_{n=1}^{\infty} r_n \sinh s_n e^{-\rho' s_n}\mathcal{T}e^{s_n t}\,;\end{aligned}$$

dies gibt mit (24)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-\rho'\sqrt{s}}}{s}\big[1+\Phi(1,\sqrt{s})\big] &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + \mathcal{L}^{-1}\big[\mathcal{L}\mathcal{T}\delta(t-\rho')\big]\cdot\mathcal{L}\mathcal{T}\varphi(1,t)\\ &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + \big[\mathcal{T}\delta(t-\rho') * \mathcal{T}\varphi(1,t)\big]\\ &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + \mathcal{T}\big[\delta(t-\rho') * \varphi(1,t)\big]\\ &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + \mathcal{T}\int\limits_0^t \delta(\tau-\rho')\varphi(1,t-\tau)d\tau\\ &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + \mathcal{T}\varphi(1,t-\rho')\\ &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + 2\Re\sum_{n=1}^{\infty} r_n \sinh s_n e^{-\rho' s_n}\mathcal{T}e^{s_n t}\,;\end{aligned}$$

somit ist mit (25)

$$\begin{aligned}f_a(t) &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) + 2\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{s_n}\sinh s_n e^{-\rho' s_n}\big(e^{s_n^2 t}\operatorname{erfc}(-s_n\sqrt{t})-1\big)\\ &= \operatorname{erfc}\big(\tfrac{\rho'}{2\sqrt{t}}\big) - 2\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{s_n}\sinh s_n e^{-\rho' s_n}\\ &\qquad + 2\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{s_n}\sinh s_n\, e^{-\rho' s_n}\, e^{s_n^2 t}\operatorname{erfc}(-s_n\sqrt{t})\,. \qquad (27)\end{aligned}$$

Für $t \to 0+$ stellt sich ein Grenzwert in Abhängigkeit von $\rho' = \frac{\rho-1}{\gamma}$ ein, und zwar

$$f_a(0+) = \begin{cases} 1 & \text{für } \rho' = 0 \text{ bzw. } \rho = 1,\\ 0 & \text{für } \rho' > 0 \text{ bzw. } \rho > 1.\end{cases}$$