

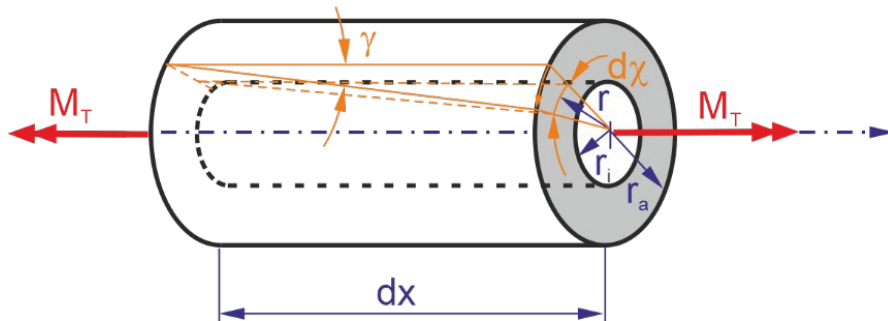
## 13. Torsion



## 13.1 Grundbegriffe

Wir beschränken uns in weiter Folge auf **Saint-Venantsche** Torsion. Man nennt sie auch **reine Torsion**, weil sich die Querschnitte ungehindert verwölben können. Eine Wölbbehinderung durch Einspannung etc. („Wölbkrafttorsion“) wird im Zuge dieser Vorlesung nicht behandelt.

### 13.1.1 Torsion kreisförmiger Querschnitte



Definition:

$$\vartheta = \frac{d\chi}{dx}$$

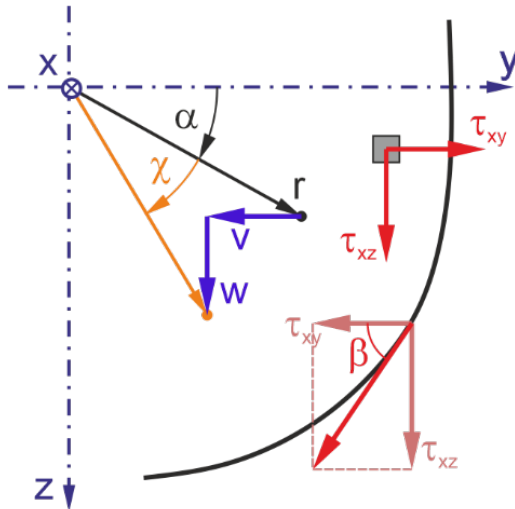
$\vartheta$  ... **Verdrehwinkel pro Längeneinheit** = Verwindung [rad/m] = [1/m]

Der Verlauf des Scherwinkels  $\gamma(r)$  kann i.a. nicht einfach bestimmt werden. Nur für den Spezialfall des Kreis(-ring)querschnitts kann davon ausgegangen werden, dass  $\gamma(r)$  linear mit dem Radius zunimmt.

Im Allgemeinen muss man jedoch einen anderen Weg gehen, um den Verzerrungs- und daraus den Spannungszustand zu bestimmen.

### 13.1.2 Torsion allgemeiner Querschnitte

Wir machen uns daher zunächst über den Verschiebungszustand  $u, v, w$  eines Materialpunktes bei Torsion Gedanken:



$$v = r(\cos(\alpha + \chi) - \cos\alpha) = r(\cos\alpha \cos\chi - \sin\alpha \sin\chi - \cos\alpha)$$

$$w = r(\sin(\alpha + \chi) - \sin\alpha) = r(\sin\alpha \cos\chi + \sin\chi \cos\alpha - \sin\alpha)$$

Für kleine Verdrehwinkel  $\chi$  gilt  $\cos\chi \approx 1, \sin\chi \approx \chi$ , somit:

$$v \approx -r\sin\alpha \cdot \chi$$

$$w \approx r\cos\alpha \cdot \chi$$

Andererseits können die Polarkoordinaten  $r, \alpha$  unmittelbar in kartesische Koordinaten  $y, z$  umgerechnet werden mit

$$y = r\cos\alpha$$

$$z = r\sin\alpha$$

Für die Verschiebungen in  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung also

$$v \approx -\chi z = -\vartheta xz$$

$$w \approx \chi y = \vartheta xy$$

Im Allgemeinen werden sich die Querschnitte aus der Ebene heraus verwölben, es gibt also eine x-Komponente der Verschiebung  $u$ . Sie ist zunächst eine unbekannte Funktion von  $y$  und  $z$ , welche sich proportional zu  $\vartheta$  verhalten wird:

$$u(y, z) = \vartheta \varphi(y, z) \dots \text{Verwölbung} \qquad \varphi(y, z) \dots \text{Wölbfunktion}$$

Einsetzen der Verschiebungen  $u, v, w$  in die Navier-Gleichungen liefert folgende Bestimmungsgleichung für die Wölbfunktion:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0$$

Die zugehörigen Randbedingungen ergeben sich aus der Tatsache, dass Spannungen nicht aus der Oberfläche ragen dürfen. Die Schubspannungen sind an der Oberfläche also tangential orientiert.

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \tan \beta = \frac{dz}{dy} \quad \text{für alle } y, z \text{ am Rand}$$

Zur Erinnerung:

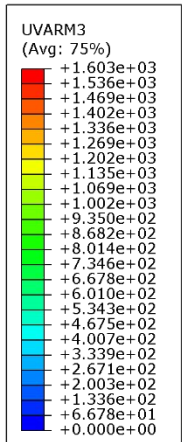
$$\begin{aligned} u &= \vartheta \varphi(y, z) \\ v &= -\vartheta xz \\ w &= \vartheta xy \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \vartheta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right)$$

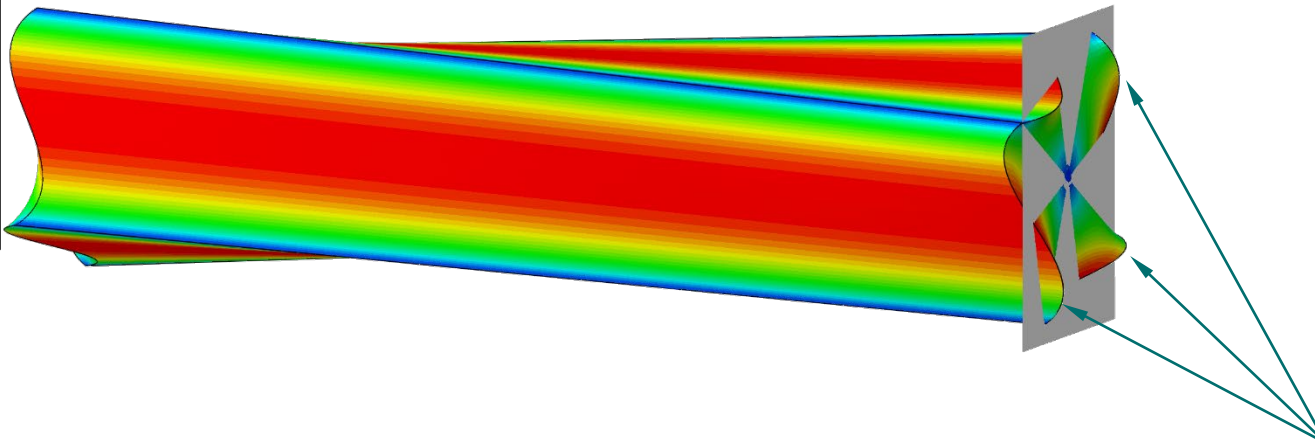
$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \vartheta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)$$

Derart komplexe Randbedingungen machen es schwierig, eine Lösung für  $\varphi$  zu finden.

Verwölbung eines Stabes mit quadratischem Querschnitt zufolge einer Torsionsbeanspruchung

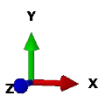


Farblich dargestellt sind hier die Torsionsschubspannungen

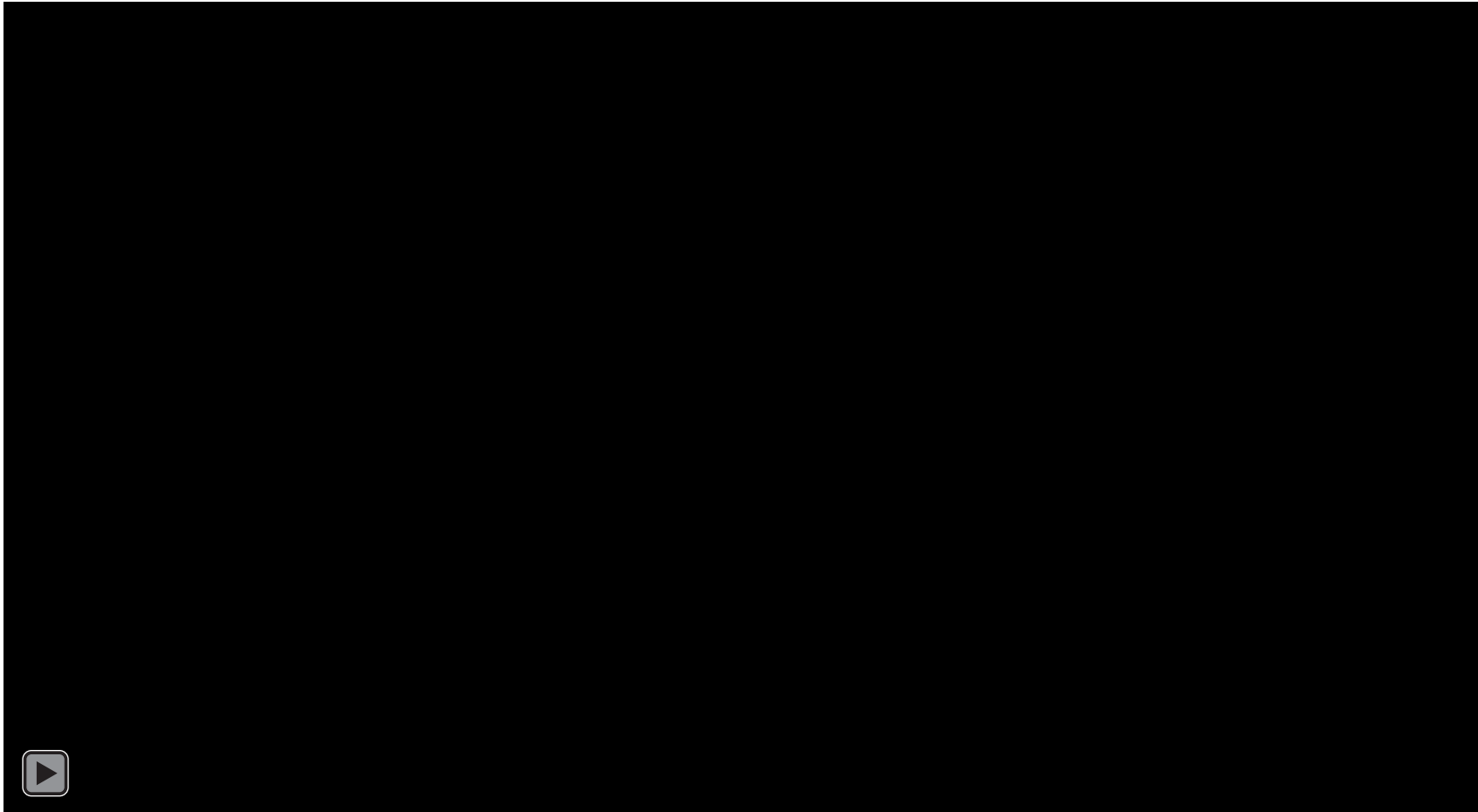


Die Wölbfunktion  $\varphi$  beschreibt die verwölbte Fläche des Querschnitts

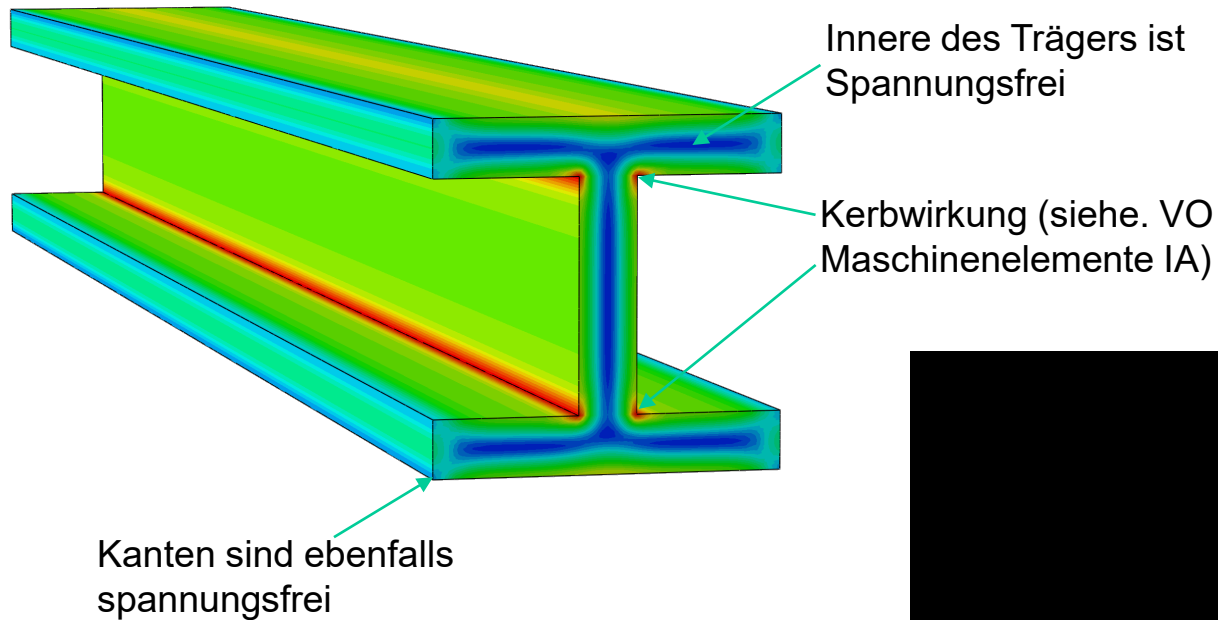
Verschiebung in x-Richtung zufolge der Querschnittsverwölbung



Verwölbung eines Stabes mit quadratischem Querschnitt



Verwölbung eines I-Trägers zufolge Torsion



Man bedient sich daher eines Tricks: Man führt eine Funktion  $\psi(y, z)$  so ein, dass das ursprüngliche Randwertproblem in ein geringfügig verändertes Randwertproblem mit wesentlich einfacheren Randbedingungen übergeführt wird. Diese Funktion erfüllt folgende 2 Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \\
 -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\
 \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)
 \end{array} \right.
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \tau_{xy} = G\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
 \tau_{xz} = -G\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y}
 \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - 2$$

oder:  $\nabla^2 \psi = -2$   $\psi$ ... Torsionsfunktion

RB:  $\tau_{xz} dy - \tau_{xy} dz = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \equiv d\psi = 0!$

Man erhält also die sehr einfache Bedingung, dass am Rand  $\psi = \text{const.}$ ! Die Wahl dieser Konstante ist im Fall einfach geschlossener Profile beliebig. Man wird daher am Rand  $\psi = 0$  setzen.

Hinweis: **Prandtl'sches Membrangleichnis**, siehe Vorlesung



Wir haben schon einmal festgehalten, wie Schubspannungen in einem Torsionsmoment resultieren:

$$M_T = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA$$

Mit Verwendung der Torsionsfunktion ergibt sich

$$M_T = -G\vartheta \int_A \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} y + \frac{\partial\psi}{\partial z} z \right) dA$$

Die einzelnen Terme können partiell integriert werden:

$$\int_A \frac{\partial\psi}{\partial y} y dA = \underbrace{\int_C \psi y dz}_{= 0 \text{ für einfach geschl. Querschnitte, da } \psi = 0 \text{ am Rand}} - \int_A \psi dA, \quad \int_A \frac{\partial\psi}{\partial z} z dA = \int_C \psi z dy - \int_A \psi dA$$

Also bleibt:

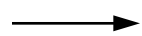
$$M_T = G\vartheta \cdot 2 \int_A \psi dA$$

Definition:

$$J_T = 2 \int_A \psi dA$$

$J_T$  ... Drillwiderstand [m<sup>4</sup>]

$GJ_T$  ... Drillsteifigkeit [Nm<sup>2</sup>]



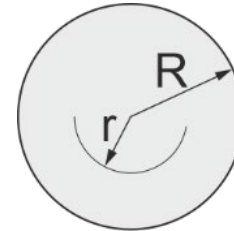
$$\vartheta = \frac{M_T}{GJ_T}$$

[m<sup>-1</sup>] ... Verdrehwinkel pro Längeneinheit, für beliebige Querschnitte

### 13.1.1 Spezielle Querschnitte

**Beispiel:** Kreisprofil mit Radius  $R$

Man kann sich davon überzeugen, dass nachfolgende Funktion Lösung des Randwertproblems ist:



$$\psi(y, z) = \frac{1}{2}(R^2 - y^2 - z^2) \quad \nabla^2 \psi = -2 \quad \checkmark$$

$$\psi = 0 \text{ am Rand, also für } y^2 + z^2 = R^2 \quad \checkmark$$

$$J_T = 2 \int_A \psi \, dA = \int_0^R [R^2 - (y^2 + z^2)] 2r\pi \, dr = 2\pi \int_0^R (R^2 r - r^3) \, dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{R^4 \pi}{2}$$

$$\vartheta = \frac{M_T}{GJ_T} = \frac{2M_T}{GR^4\pi}$$

$$\tau_{xy} = G\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial z} = -G\vartheta z, \quad \tau_{xz} = -G\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y} = G\vartheta y$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\vartheta \sqrt{y^2 + z^2} = G\vartheta r = \frac{M_T}{GJ_T} Gr = \frac{M_T}{J_T} r$$

Für Kreis und Kreisringprofile entspricht also der **Drillwiderstand** dem **polaren FTRM** des Profils:

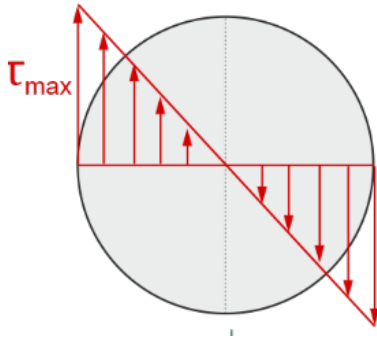
$$J_T = J_p$$

Fassen wir die Formeln für Kreisquerschnitte noch einmal zusammen:

$$\tau(r) = \frac{M_T}{J_T} r$$

$$J_T = J_p = \frac{R^4 \pi}{2}$$

Die Schubspannungen zeigen in Umfangsrichtung, nehmen linear mit dem Abstand zum Mittelpunkt zu und sind daher bei  $r = R$  maximal.



Der Verdrehwinkel pro Längeneinheit kann wieder mit  $\vartheta = \frac{M_T}{GJ_T}$  berechnet werden, indem man für  $J_T = J_p$  setzt.

$$\vartheta = \frac{M_T}{GJ_p}$$

Für Kreisringquerschnitte (Außenradius  $R_a$ , Innenradius  $R_i$ ) gelten obige Formeln analog.

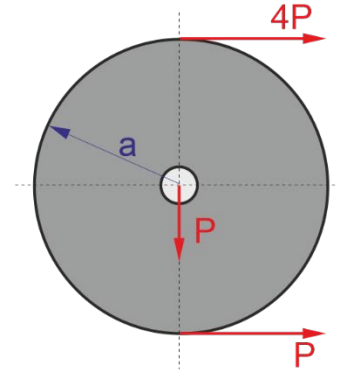
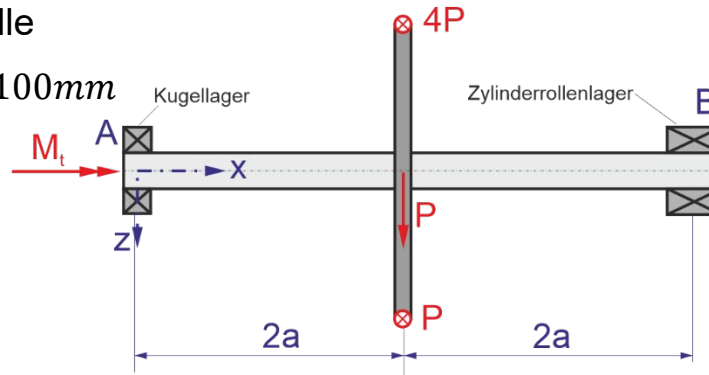
$J_p$  ist dann:

$$J_p = \frac{(R_a^4 - R_i^4) \pi}{2}$$

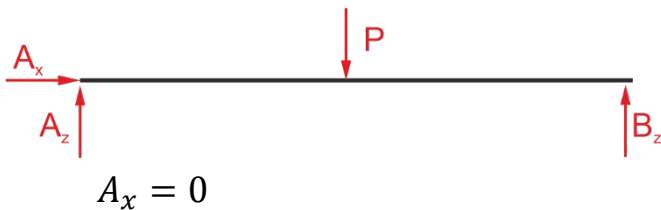
**Beispiel:** Dimensionierung einer Welle

Geg.  $\sigma_{zul} = 50\text{MPa}$ ,  $P = 100\text{N}$ ,  $a = 100\text{mm}$

Ges.  $d$  nach HMH



Hier ist es sinnvoll in zwei Ebenen zu arbeiten.  
x-z-Ebene:

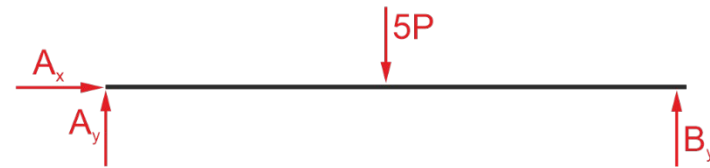


$$A_x = 0$$

$$A_z = \frac{1}{2}P$$

$$B_z = \frac{1}{2}P$$

x-y-Ebene:



$$A_y = \frac{5}{2}P$$

$$B_y = \frac{5}{2}P$$

Schnittgrößen:

Bereich 1:  $0 \leq x \leq 2a$

$$M_t = 3Pa$$

$$M_y(x) = \frac{1}{2}Px$$

$$M_z(x) = \frac{5}{2}Px$$

Das betragsmäßig größte Biegemoment tritt in beiden Ebenen an der Stelle der Scheibe auf.

$$M_{bmax} = \sqrt{M_y^2(x = 2a) + M_z^2(x = 2a)}$$

$$M_{bmax} = \sqrt{26}Pa$$

Das betragsmäßig größte Torsionsmoment tritt zwischen der Scheibe und dem Lager A auf.

$$M_{tmax} = 3Pa$$

Sowohl bei der Biegung als auch bei der Torsion treten die maximalen Spannungen in den "Randfasern" des Querschnitts auf.

$$\sigma_b(x, z) = \frac{M_b}{J_y} z$$

$$\tau_t(x, r) = \frac{M_t}{J_p} r$$

$$\sigma_{bmax} = \sigma_b \left( x = 2a, z = \frac{d}{2} \right) = \frac{32\sqrt{26}Pa}{d^3\pi}$$

$$\tau_{tmax} = \tau_t \left( x = 2a, r = \frac{d}{2} \right) = \frac{48Pa}{d^3\pi}$$

Vergleichsspannungshypothese nach HMH für zylindrische Stäbe unter Biege- und Torsionsbelastung.

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{32\sqrt{26}Pa}{d^3\pi}\right)^2 + 3\left(\frac{48Pa}{d^3\pi}\right)^2} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_v = \frac{Pa}{d^3\pi} \sqrt{(32\sqrt{26})^2 + 3(48)^2} \leq \sigma_{zul}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\sqrt{33536} \frac{Pa}{\sigma_{zul}\pi}}$$

$$d \geq 22,67mm$$

**Beispiel:** Rechtecksprofil, Abmessungen  $a, b$

Ellipse:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{Funktion des Randes}$$

$$\psi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{b}\right)^2 \right)$$

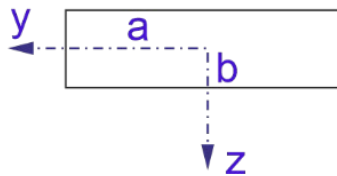
Vorfaktor Funktion am Rand ist null

$$\lim \left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow 0$$

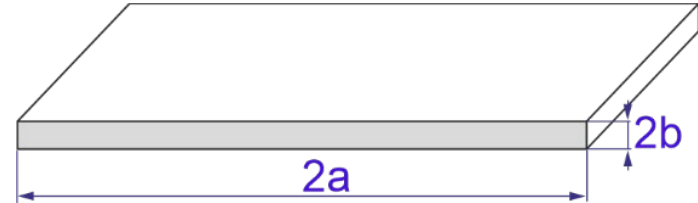
$\psi = b^2 - z^2$  Umso größer  $a$ , desto genauer ist dieser Zusammenhang

$$J_T = 2 \int_A \psi dA = 8 \int_0^a \int_0^b (b^2 - z^2) dy dz = \frac{16}{3} ab^3$$

Stimmt hier nur näherungsweise:



$\psi = 0$  ... nicht möglich  
 $\Delta\psi = -2$

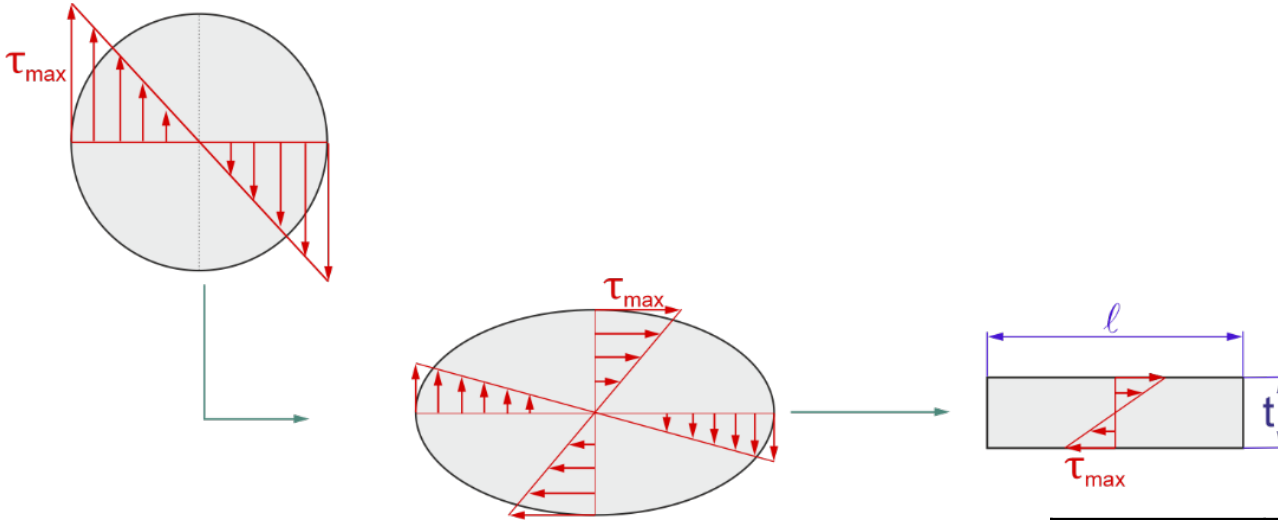


$J_T$  mittels Fourierreihe:

$$\psi = K(y^2 - a^2)(z^2 - b^2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2$$

## 13.2 Torsion dünnwandiger, offener Profile



Rechteck:  $J_T = \xi_1 \ell t^3$   
 $\tau_{max} = \xi_2 \frac{M_T}{\ell t^2}$

$\xi_1, \xi_2$  aus Tabelle

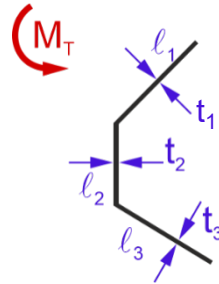
für  $t \ll \ell$ :  $\xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = 3$

$\ell/t$	$\xi_1$	$\xi_2$
1,0	0,141	4,808
1,2	0,166	4,566
1,5	0,196	4,329
2	0,229	4,065
5	0,291	3,436
10	0,312	3,205
$\infty$	0,3	3

für zusammengesetzte, dünnwandige Querschnitte gibt:

$$J_T = \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3$$

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{J_T} t_{max}$$



Bei gekrümmten, offenen Profilen kann man das Profil näherungsweise als abgewickeltes Rechteck betrachten.

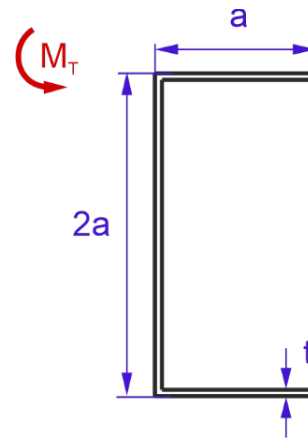
**Beispiel:** Dünnwandiges, offenes Profil

Geg.  $M_t, a, t, a \gg t$

Ges.  $J_t, \tau_{max}$

$$J_T = \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3 = \frac{1}{3} (at^3 + 2at^3 + at^3) = \frac{4}{3} at^3$$

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{J_T} t_{max} = \frac{3M_t}{4at^2}$$



Die maximale Schubspannung tritt im dicksten Steg des zusammengesetzten Querschnitts auf