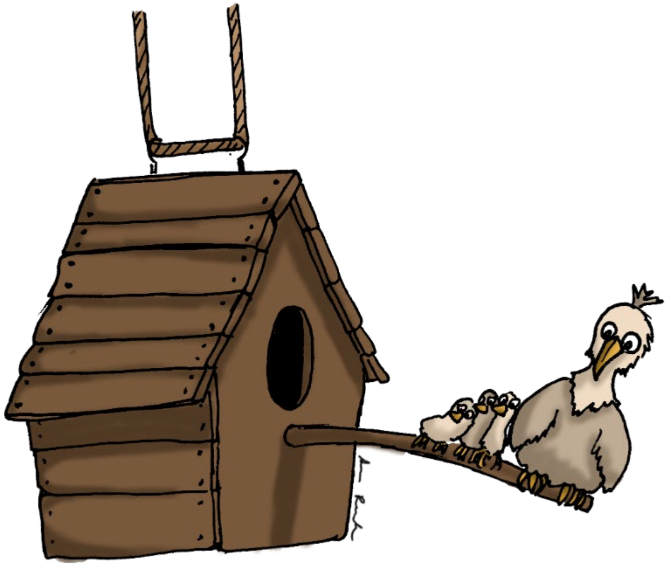
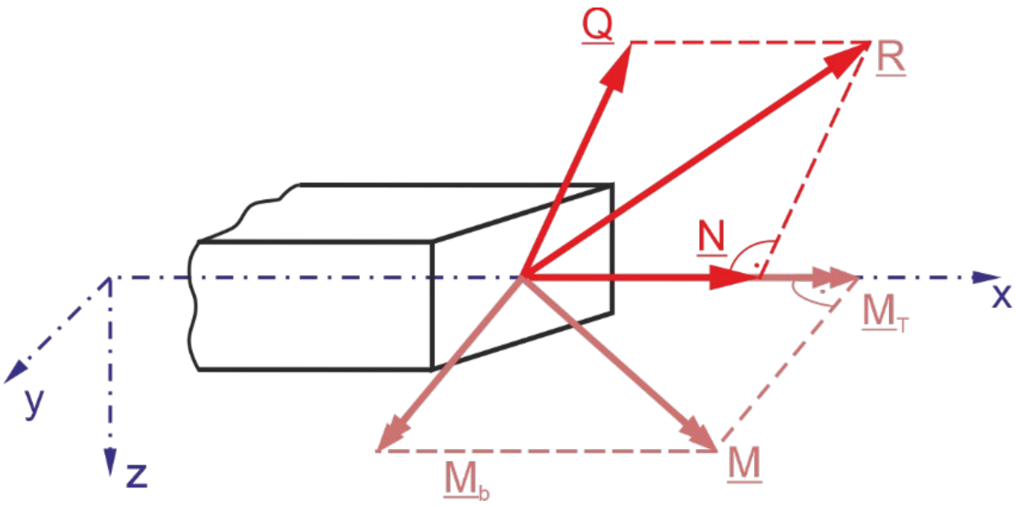
12. Der gerade Stab



12.1 Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen

Die Schnittgrößen haben wir ja schon kennengelernt. Sie seien hier noch einmal zusammengefasst:



$\underline{N}$ ... Normalkraft

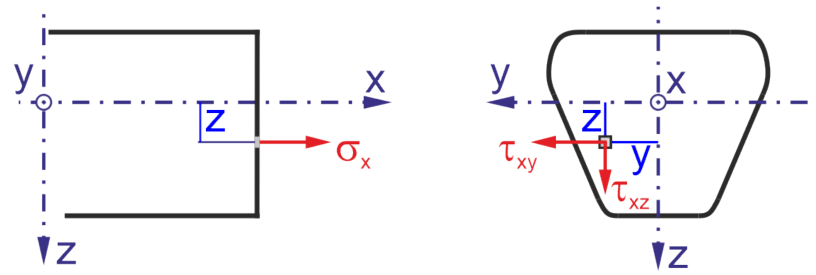
$\underline{Q}$ ... Querkraft

$\underline{M}_b$ ... Biegemoment

$\underline{M}_T$ ... Torsionsmoment

Die Frage lautet nun, welche Spannungen und welche Verformungen durch diese Schnittgrößen hervorgerufen werden. Das soll in den folgenden Kapiteln erläutert werden.

Zusammenhang Schnittgrößen und Spannungen:



Auf einer Schnittfläche normal zur x-Achse sieht man Spannungsvektoren der Form

$$\underline{\sigma}_x = \sigma_x \underline{e}_x + \tau_{xy} \underline{e}_y + \tau_{xz} \underline{e}_z$$

Die resultierende Wirkung dieser Spannungsvektoren schlägt sich im resultierenden Schnittkraftvektor $\underline{R}(x)$ sowie im resultierenden Schnittmoment $\underline{M}(x)$ nieder.

$$\underline{R} = \int_A \underline{\sigma}_x(x, y, z) dA$$

$$\underline{M} = \int_A [\underline{r} \times \underline{\sigma}_x(x, y, z)] dA$$

mit $\underline{r} = y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$

$$N(x) = \iint \sigma_x(x, y, z) dydz$$

$$Q_y(x) = \iint \tau_{xy}(x, y, z) dydz$$

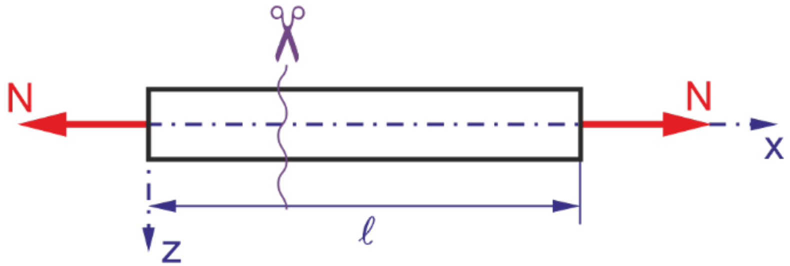
$$Q_z(x) = \iint \tau_{xz}(x, y, z) dydz$$

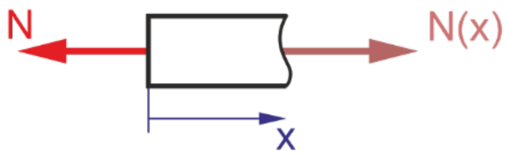
$$M_x(x) = \iint [y\tau_{xz}(x, y, z) - z\tau_{xy}(x, y, z)] dydz$$

$$M_y(x) = \iint z\sigma_x(x, y, z) dydz$$

$$M_z(x) = -\iint y\sigma_x(x, y, z) dydz$$

12.2 Beanspruchung durch Normalkraft





Reine Zug-/Druckbelastung hat einen einachsigen Spannungszustand σ_x zur Folge. Bei konstantem Querschnitt $A(x)$=konst. kann man davon ausgehen, dass σ_x im ganzen Querschnitt konstant ist:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\text{, alle anderen Spannungen = 0.}$$

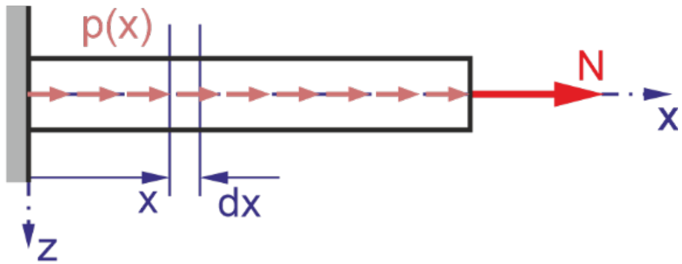
Nach dem Hookeschen Gesetz gilt (für $\Delta T = 0$):

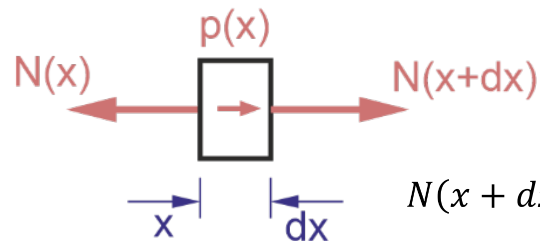
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

EA … Dehnsteifigkeit.

12.2 Beanspruchung durch Normalkraft

Gesucht ist nun die Verschiebungslinie $u(x)$ für den nachfolgend skizzierten Stab:





$$N(x+dx) = N + \frac{dN}{dx}dx$$

Darin ist p(x) eine in x-Richtung verteilte Last von der Dimension [N/m].

Setzen wir ein differenziell kleines Stabelement der Länge dx ins Gleichgewicht, so ergibt sich:

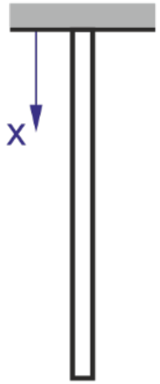
$$-N + N + \frac{dN}{dx}dx + p(x)dx = 0 \rightarrow p(x) = -\frac{dN}{dx}$$

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = E\varepsilon_x \quad \text{also} \quad \frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{1}{A}\frac{dN}{dx} = E\frac{d\varepsilon_x}{dx}$$

Den Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen kennen wir bereits: $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$

Somit folgt: $-\frac{1}{A}p(x) = E\frac{d^2u}{dx^2} \rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{p(x)}{EA}}$ Differentialgleichung der Verschiebungslinie

Beispiel: Seil unter Eigengewicht, Dichte ρ, Länge ℓ, konstante Querschnittsfläche A



geg.: ρ, ℓ, E, A

ges.: $u(x)$, $\sigma_x(x)$, σ_{max}

$$p(x) = \rho g A$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\rho g A}{EA}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\rho g}{E}x + C_1$$

$$u(x) = -\frac{\rho g}{E}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Die Integrationskonstanten folgen aus den Randbedingungen:

$$u(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u' = \frac{du}{dx}(x=\ell) = 0 \Longrightarrow C_1 = \frac{\rho g \ell}{E}$$

$$\underline{u(x)} = \frac{\rho g}{E}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right) = \underline{\frac{\rho g}{2E}x(2\ell - x)}$$

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \underline{\rho g(\ell - x)}$$

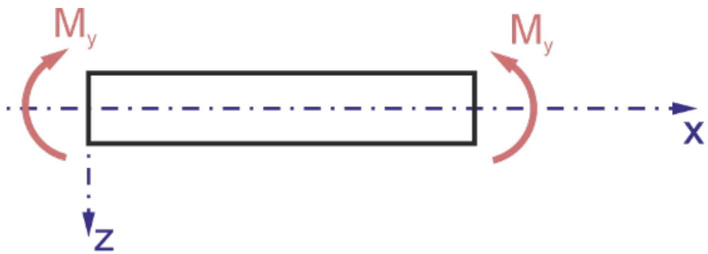
$$\sigma_{max} = \sigma_x(x=0) = \underline{\rho g \ell}$$

Bei Vorgabe der Zugfestigkeit R_m kann man eine nur vom Seilwerkstoff abhängende Reißlänge ℓ_R berechnen:

$$\ell_R = \frac{R_m}{\rho g}$$

12.3 Beanspruchung auf Biegung

Wir betrachten zunächst den Fall der reinen Biegung



Voraussetzungen für reine Biegung:

1) Die Stabachse ist gerade (x-Achse)
2) Der Stab hat konstanten Querschnitt
3) Die Querschnitte sind symmetrisch zur x-z Ebene
4) Die y-Achse geht durch den geometrischen Schwerpunkt der Querschnitte
5) Normalkraft $N = 0$
6) Torsionsmoment $M_x = 0$
7) Biegemomentenkomponente $M_z = 0$
8) Querkraftkomponente $Q_y = 0$
9) Querkraftkomponente $Q_z = 0$
10) Biegemomentenkomponente M_y ist konstant.

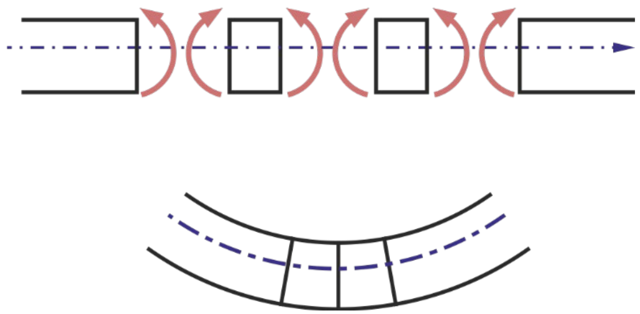
Aus den Voraussetzungen 3 und 4 folgt:
x, y, z …. Trägheitshauptachsen

Wenn obige Voraussetzungen erfüllt sind, dann lassen sich folgende Aussagen treffen:

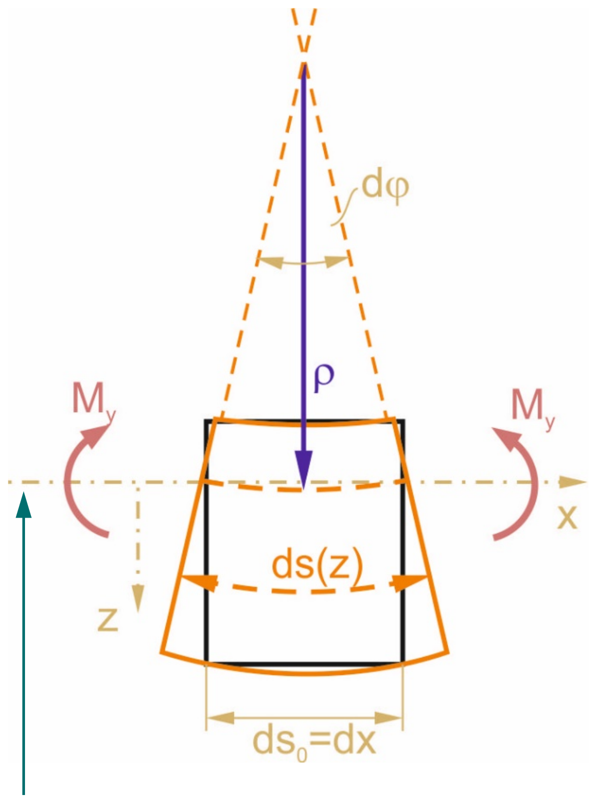
I. Die Stabachse wird gebogen, aber nicht gedehnt.
II. Alle Querschnitte bleiben eben und normal auf die Stabachse.
III. Er treten nur Normalspannungen auf, aber keine Schubspannungen.

Beweis:

Bei reiner Biegung ist jeder beliebige Abschnitt des Stabes ein Spiegelbild seiner Nachbarn, somit müssen die Querschnittsebenen Symmetrieebenen sein und dies auch nach Deformation bleiben. Das ist nur möglich, wenn Aussage II. gilt. Setzt man die einzelnen verformten Abschnitte zusammen, so ergibt sich infolgedessen ein Kreisbogen mit Radius ρ.



Betrachten wir einen Abschnitt der Länge dx im Detail:



neutrale Faser
(wird gebogen, aber nicht gedehnt)

Gesucht wird nun ein Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius ρ und dem Biegemoment M_y. Ausgehend von einer zunächst noch unbekannten Lage der ungedehnten Faser als Bezugsachse gilt:

$$ds_0 = dx = \rho d\varphi$$

$$ds(z) = (\rho + z)d\varphi$$

$$\varepsilon_x(z) = \frac{ds(z) - ds_0}{ds_0} = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{z}{\rho}$$

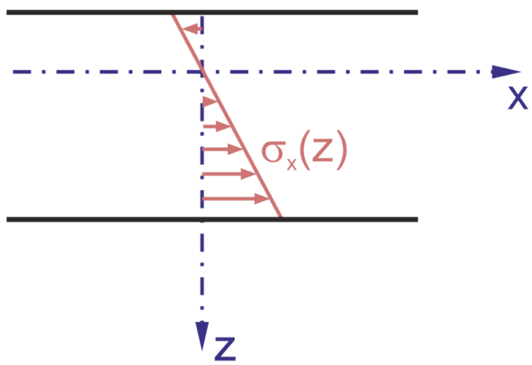
Aus Voraussetzung 5) ergibt sich

$$N = \int_A \sigma_x \, dA = \frac{E}{\rho}\int_A z \, dA = 0$$

Definition des Flächen-SP!

Das Integral verschwindet nur dann, wenn z vom geometrischen Schwerpunkt der Querschnitte ausgehend gezählt wird. Das definiert aber laut Voraussetzung 4) die Lage der x-Achse. Damit ist die Stabachse die neutrale Faser und Aussage I. bewiesen.

Es entstehen also Normalspannungen σ_x in x-Richtung, die über die Höhe z linear verteilt sind:



$$M_y = \int_A z\sigma_x\, dA = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A z^2 dA}$$

$J_y \ldots$ FTRM bzgl. Schwerachse

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EJ_y}$$

$EJ_y \ldots$ Biegesteifigkeit [Nm²]

Mit $\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{z}{\rho}$ wird daraus

$$\boxed{\sigma_x(z) = \frac{M_y}{J_y} z}$$

Bei reiner Biegung sind, wie gesagt, alle Querschnitte Symmetrieebenen. Jede Spannungskomponente auf dem linken Schnittufer hat eine gespiegelte Entsprechung auf dem rechten Schnittufer. Beim Zusammenfügen der Schnittufer müssen diese nach außen hin verschwinden. Das ist aber nur dann möglich, wenn die Spannungsvektoren normal auf die Symmetrieebene stehen, also keine y- oder z-Komponente haben. Daraus folgt, dass τ_{xy} sowie τ_{xz} null sein müssen. → Aussage III.

Das ist auch im Einklang mit den Voraussetzungen 6), 8) und 9)

$$Q_y = \int \tau_{xy} dA = 0$$

$$Q_z = \int \tau_{xz} dA = 0$$

$$M_x = \int (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA = 0$$

Bei Vorliegen einer Querkraft $Q_z(x)$ und nicht konstantem Querschnitt sind die Voraussetzungen 2), 9), 10) nicht mehr erfüllt. Die Querkraft erzeugt Schubspannungen und eine Querschnitts-verwölbung, die Aussagen I., II. und III. gelten also nicht mehr exakt.

Im Rahmen der Technischen Biegelehre geht man aber von der Bernoulli Hypothese aus:

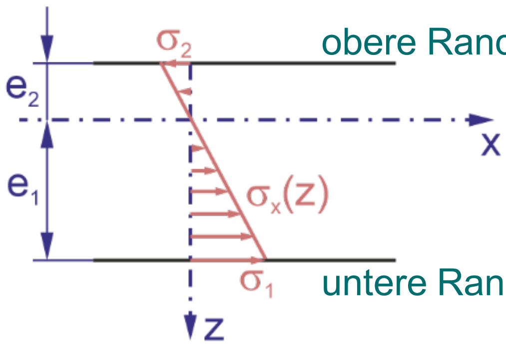
> Solange die betrachteten Stäbe als schlank angesehen werden dürfen (d.h. Querschnittsabmessungen sind klein gegen die Länge), kann man näherungsweise davon ausgehen, dass die Querschnitte eben und normal zur Stabachse bleiben.

Somit kann man schreiben:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_y(x)}{EJ_y(x)} \qquad \boxed{\sigma_x(x,z) = \frac{M_y(x)}{J_y(x)} z}$$

fundamental !!

Für die Trägerdimensionierung sind in erster Linie die Spannungen in den äußeren Fasern des Stabs interessant. Setzt man die Randfaserabstände e_1, e_2 in (*) ein, so erhält man die Extremwerte für die Biegespannungen σ_1, σ_2:



obere Randfaser $\sigma_2 = -\frac{M_y}{J_y} e_2$

untere Randfaser $\sigma_1 = \frac{M_y}{J_y} e_1$

Definition:

$$W_{y,1} = \frac{J_y}{e_1}, \quad W_{y,2} = \frac{J_y}{e_2}$$

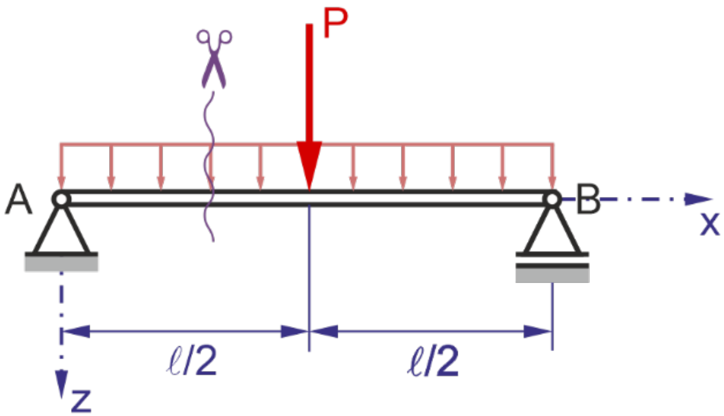
…. Widerstandsmoment [m³]

also:

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{W_{y,1}}, \quad \sigma_2 = -\frac{M_y}{W_{y,2}}$$

wesentliche Formel zur Dimensionierung von Trägern !!

Beispiel: Dimensionierung eines Trägers der Länge ℓ, Belastung P und q_0 zufolge Eigengewicht



Geg.: $P = 36\text{kN}$

$\sigma_{zul} = 140\text{N/mm}^2$

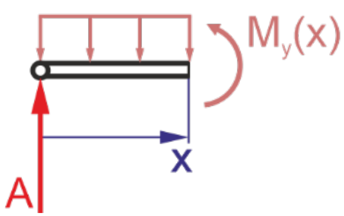
$\ell = 6\text{m}$

Ges.: IPE Träger lt. Norm, siehe beigefügtes Tabellenblatt

$$A = B = \frac{P}{2} + q_0 \frac{\ell}{2}$$

$$M_{y,\max} = \frac{P\ell}{4} + q_0 \frac{\ell^2}{8}$$

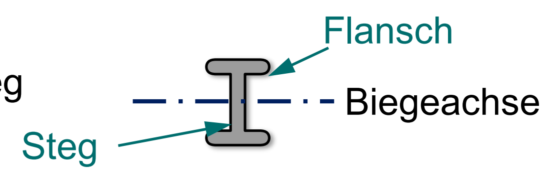
noch unbekannt



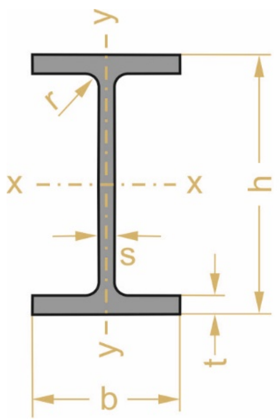
$$W_{y,erf} = \frac{M_{y,\max}}{\sigma_{zul}} = \frac{P\ell}{4\sigma_{zul}} + \frac{q_0\ell^2}{8\sigma_{zul}}$$

$$\frac{P\ell}{4\sigma_{zul}} = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{4 \cdot 140} = 386 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 386 \text{ cm}^3$$

Achtung: I-Träger werden normalerweise stehend, d.h. mit Steg in Lastrichtung eingebaut.



Warmgewalzte, mittelbreite I-Träger,
IPE-Reihe nach DIN 1025 Blatt 5 (Auszug)



Kurzzeichen	Maße für					Querschnitt A	Gewicht G	Für die Biegeachse x-x			y-y			S_x	s_x
IPE	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm	cm^2	kg/m	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	cm^3	cm
80	80	46	3,8	5,2	5	7,64	6,0	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	11,6	6,90
100	100	55	4,1	5,7	7	10,3	8,1	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	19,7	8,68
120	120	64	4,4	6,3	7	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	30,4	10,5
140	140	73	4,7	6,9	7	16,4	12,9	541	77,3	5,74	144,9	12,3	1,65	44,2	12,3
160	160	82	5,0	7,4	9	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	61,9	14,0
180	180	91	5,3	8,0	9	23,9	18,8	1320	146	7,42	101	22,2	2,05	83,2	15,8
200	200	100	5,6	8,5	12	28,5	22,4	1940	194	8,26	142	28,5	2,24	110	17,6
220	220	110	5,9	9,2	12	33,4	26,2	2770	252	9,11	205	37,3	2,48	143	19,4
240	240	120	6,2	9,8	15	39,1	30,7	3890	324	9,97	284	47,3	2,69	183	21,2
270	270	135	6,6	10,2	15	45,9	36,1	5790	429	11,2	420	62,2	3,02	242	23,9
300	300	150	7,1	10,7	15	53,8	42,2	8360	557	12,5	604	80,5	3,35	314	26,6
330	330	160	7,5	11,5	18	62,6	49,1	11770	713	13,7	788	98,5	3,55	402	29,3
360	360	170	8,0	12,7	18	72,7	57,1	16270	904	15,0	1040	123	3,79	510	31,9
400	400	180	8,6	13,5	21	84,5	66,3	23130	1160	16,5	1320	146	3,95	654	35,4
450	450	190	9,4	14,6	21	98,8	77,6	33740	1500	18,5	1680	176	4,12	851	39,7
500	500	200	10,2	16,0	21	116	90,7	48200	1930	20,4	2140	214	4,31	1100	43,9
550	550	210	11,1	17,2	24	134	106	67120	2440	22,3	2670	254	4,45	1390	48,2
600	600	220	12,0	19,0	24	156	122	92080	3070	24,3	3390	308	4,66	1760	52,4

I Flächenmoment 2. Grades
W Widerstandsmoment
i Trägheitsradius
S_x Flächenmoment 1. Grades des halben Querschnitts
s_x = I_x/S_x, Abstand Druck- und Zugmittelpunkt

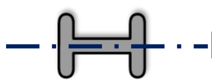
gewählt: IPE 270: $W_{y,1} = W_{y,2} = W_y = 429\ \mathrm{cm}^3$

$q_0 = 36.1\text{kg/m} \cdot g = 354\ \text{N/m} = 0.354\ \text{N/mm}$

$$\frac{q_0 \ell^2}{8\sigma_{zul}} = \frac{0.354 \cdot 6^2 \cdot 10^6}{8 \cdot 140} = 11 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3 = 11\ \mathrm{cm}^3$$

$W_{y,erf} = 386 + 11 = 397\ \mathrm{cm}^3 < 429\ \mathrm{cm}^3$

Zum Vergleich, Einbau um 90° verdreht:

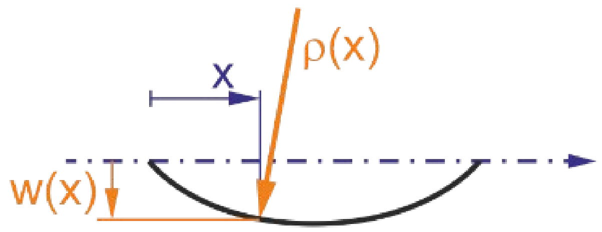

Biegeachse

$W_y = 62.2\ cm^3$, also nicht zulässig

12.4 Differentialgleichung der Biegelinie

Mit Hilfe der Differentialgeometrie kann man zeigen:

$$\frac{1}{\rho(x)} = -\frac{w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} \approx -w''$$



$$w' = \frac{dw}{dx}, \quad w'' = \frac{d^2w}{dx^2}$$

zur Erinnerung: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EJ_y}$

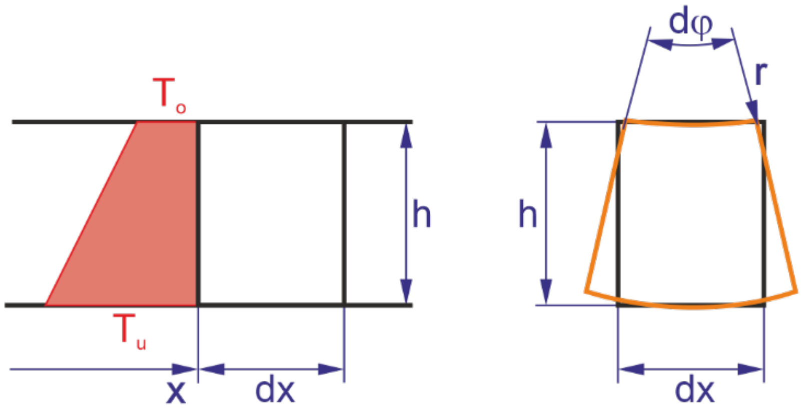
$$\boxed{w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EJ_y(x)}}$$

Differentialgleichung der Biegelinie (2. Ordnung)

Die Durchbiegung $w(x)$ folgt dann durch 2-malige Integration. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten können durch Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt werden.

12.4.1 Biegelinie zufolge einer Temperaturverteilung (Temperaturmoment)

Wir beschränken uns in weiterer Folge auf lineare Temperaturverteilungen über die Trägerhöhe.



$$ds_o = dx + \alpha(T_o - T_{\text{ref}})dx$$

$$ds_u = dx + \alpha(T_u - T_{\text{ref}})dx$$

$$ds_u - dso = (r+h)d\varphi - rd\varphi$$

$$\rightarrow \alpha(T_u - T_o)dx = hd\varphi$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \alpha\frac{T_u - T_0}{h} = \alpha\Theta$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha\Theta = \frac{1}{\rho} \approx -w'' \qquad (\rho d\varphi = dx)$$

$w'' = -\alpha\Theta$ ... zufolge Temperaturmoment

Definition: $$\boxed{\Theta = \frac{T_u - T_0}{h}}$$

Temperaturmoment [K/m]

durch Superposition ergibt sich

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\left[\frac{M_y(x)}{EJ_y(x)} + \alpha\Theta(x)\right]$$

Differentialgleichung der Biegelinie (inkl. Temperaturmoment)

Bei statisch bestimmter Lagerung entstehen durch eine lineare Temperaturverteilung über den Querschnitt keine zusätzlichen Spannungen.

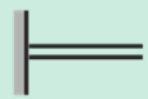
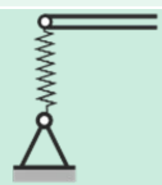
Bei allgemeiner Temperaturverteilung $T(x,y,z)$ kann man $\Theta(x)$ wie folgt berechnen:

$$\Theta(x) = \frac{1}{J_y(x)} \int_A zT(x,y,z)dA$$

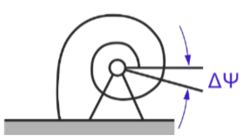
Im Allgemeinen treten aber dann auch bei statisch bestimmter Lagerung Spannungen auf.

12.4.2 Randbedingungen für die Differentialgleichung der Biegelinie

Mit Randbedingungen wird die Lagerung der Trägerenden, und deren Einfluss auf die Biegelinie berücksichtigt.

Lagerung	Symbol	Randbedingung
Feste Einspannung		$w = 0$ $w' = 0$ $(w'' \neq 0)$
Fest- und Loslager		$w = 0$ $w' \neq 0$ $(w'' = 0)$
Feder		$w \neq 0$ $w' \neq 0$ $(w'' = 0)$
Freies Trägerende		$w \neq 0$ $w' \neq 0$ $(w'' = 0)$

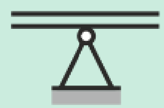
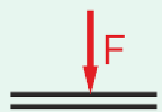
Aber Achtung, es wird darauf verwiesen, dass die Randbedingungen vom Aufbau sowie der Belastung des Balkens abhängig ist, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:



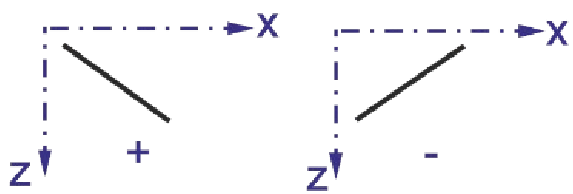
Hier ist $w'' \neq 0$

12.4.3 Übergangsbedingungen für die Differentialgleichung der Biegelinie

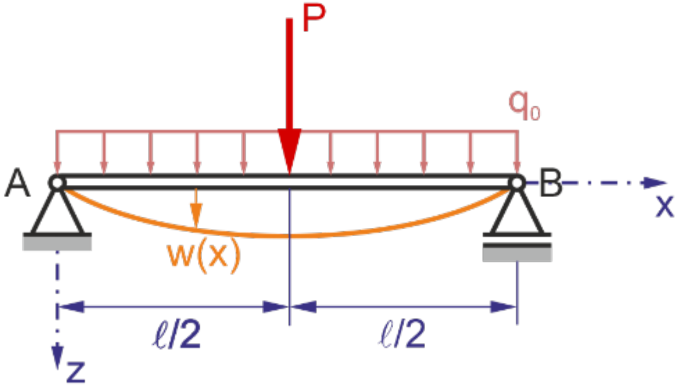
Mit Übergangsbedingungen wird die Stetigkeit der Biegelinie sichergestellt.

Lagerung	Symbol	Übergangsbedingung
Zwischenstütze:		$w_L = w_R = 0$ $w_L' = w_R'$ $(w'' \neq 0)$
Übergang zwischen zwei Feldern		$w_L = w_R$ $w_L' = w_R'$ $(w'' \neq 0)$

Hinweis: Vorzeichenkonvention für die Steigung:



Beispiel: Biegelinie eines Trägers der Länge ℓ, Belastung P und Streckenlast q_0, Biegesteifigkeit EJ_y



$$A = B = \frac{P}{2} + q_0 \frac{\ell}{2}$$

$0 \leq x \leq l/2$:

$$M(x) = Ax - q_0 \frac{x^2}{2} = \left(\frac{P}{2} + q_0 \frac{\ell}{2}\right) x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$w'' = -\frac{M_y(x)}{EJ_y}$$

$$EJ_y w'' = -Ax + q_0 \frac{x^2}{2} \qquad \Big| \int dx$$

$$EJ_y w' = -A\frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \qquad \Big| \int dx$$

$$EJ_y w = -A\frac{x^3}{6} + q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 folgen aus Randbedingungen:

(1) $w(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=0$

(2) $w'(x=\ell/2)=0=-A\frac{\ell^2}{8}+q_0\frac{\ell^3}{48}+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=A\frac{\ell^2}{8}-q_0\frac{\ell^3}{48}$

$$EJ_y \mathrm{w}=-A\frac{x^3}{6}+q_0\frac{x^4}{24}+A\frac{\ell^2}{8}x-q_0\frac{\ell^3}{48}x=Ax\left(\frac{\ell^2}{8}-\frac{x^2}{6}\right)+q_0x\left(\frac{x^3}{24}-\frac{\ell^3}{48}\right)$$

$$\underline{w(x)=\frac{1}{48EJ_y}\left[(P+q_0\ell)x(3\ell^2-4x^2)+q_0x(2x^3-\ell^3)\right]}$$

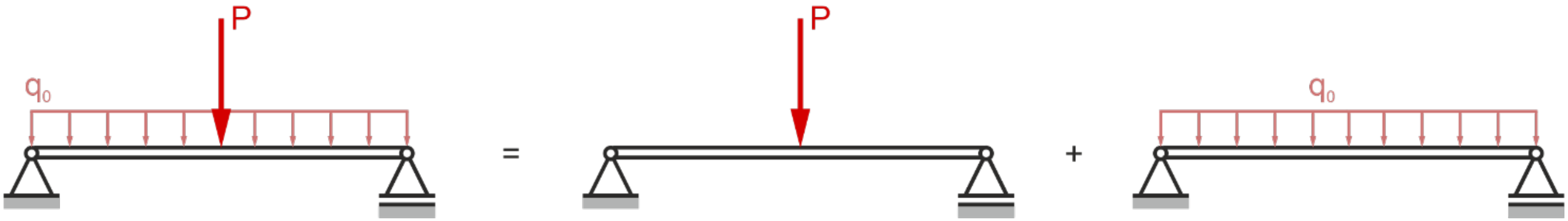
$$w_{\max}=w(x=\ell/2)=\frac{1}{48EJ_y}\left[(P+q_0\ell)\ell^3-\frac{3}{8}q_0\ell^4\right]=\underline{\frac{P\ell^3}{48EJ_y}+\frac{5}{384}\frac{q_0\ell^4}{EJ_y}} \qquad \left[\frac{\mathrm{Nm}^3}{\mathrm{Nm}^{-2}\mathrm{m}^4}=\mathrm{m}\right]$$

Auswertung für IPE 270, ℓ =6m, P =36kN, E =210GPa:

$$w_{\max}=\underbrace{\frac{36\cdot10^3\cdot6^3\cdot10^9}{48\cdot210\cdot10^3\cdot5790\cdot10^4}}_{\substack{13.3 \\ \text{zufolge } P}}+\underbrace{\frac{5\cdot0.354\cdot6^4\cdot10^{12}}{384\cdot210\cdot10^3\cdot5790\cdot10^4}}_{\substack{0.5 \\ \text{zufolge } q_0}}=\underline{13.8\mathrm{mm}}$$

Superpositionsprinzip:

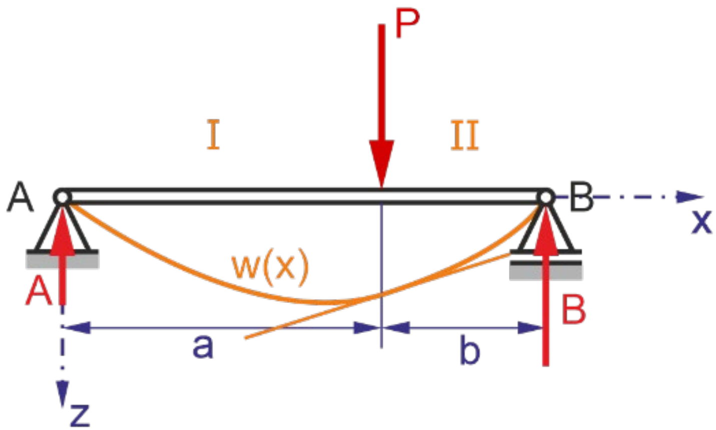
An der Gleichung der Biegelinie ist erkennbar, das sich die Biegelinie an jeder Stelle aus dem Anteil der Durchbiegung zufolge der Kraft P und dem Anteil der Durchbiegung zufolge der Streckenlast zusammensetzt.



$$w(x) = w_P(x) + w_{q_0}(x)$$

Folglich wäre man auf die selbe Lösung gekommen, wenn man für beide Fälle einzeln die Biegelinie ermittelt und diese schließlich superponiert.

Beispiel: unsymmetrisch belasteter Träger

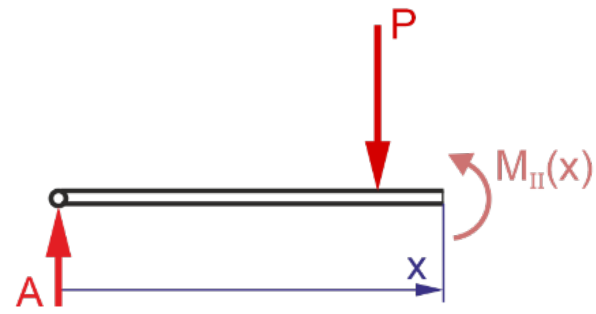


Geg.: P, a, b, EJ_y

Ges.: Biegelinie

$$A = P\frac{b}{a+b}$$

$$B = P\frac{a}{a+b}$$



Bereich I: $0 \le x \le a$

$$M_I(x) = Ax = P\frac{b}{a+b}x$$

$$EJ_y w_I'' = -P\frac{b}{a+b}x$$

$$EJ_y w_I' = -P\frac{b}{a+b}\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EJ_y w_I = -P\frac{b}{a+b}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Bereich II: $a \le x \le a+b$

$$M_{II}(x) = Ax - P(x-a) = Pa - P\frac{a}{a+b}x$$

$$EJ_y w_{II}'' = P\frac{a}{a+b}x - Pa$$

$$EJ_y w_{II}' = P\frac{a}{a+b}\frac{x^2}{2} - Pax + D_1$$

$$EJ_y w_{II} = P\frac{a}{a+b}\frac{x^3}{6} - Pa\frac{x^2}{2} + D_1 x + D_2$$

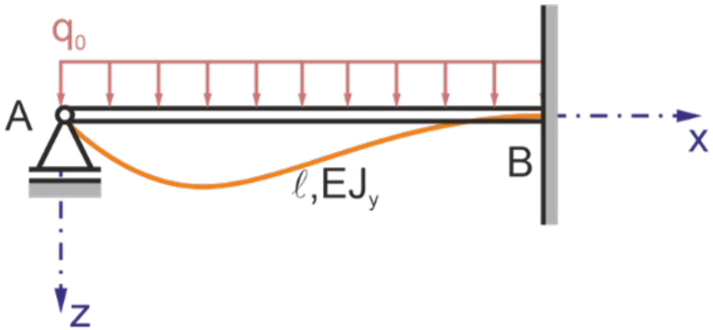
Die Rand- und Übergangsbedingungen lauten:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & w_I(x=0)=0 \\ (2) & w_{II}(x=a+b)=0 \end{array}\right\} \quad \text{Randbedingungen}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & w_I(x=a)=w_{II}(x=a) \\ (4) & w_I'(x=a)=w_{II}'(x=a) \end{array}\right\} \quad \text{Übergangsbedingungen}$$

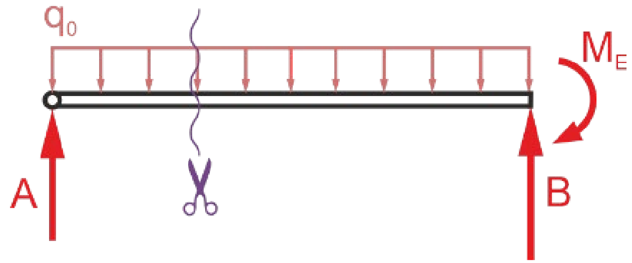
$$\left.\begin{array}{ll} (1) & C_2=0 \\ (2) & 0=-Pa\frac{(a+b)^2}{3}+D_1(a+b)+D_2 \\ (3) & -\frac{P}{6}\frac{a^3 b}{a+b}+C_1 a+C_2=\frac{P}{6}\frac{a^4}{a+b}-\frac{P}{2}a^3+D_1 a+D_2 \\ (4) & -\frac{P}{2}\frac{a^2 b}{a+b}+C_1=\frac{P}{2}\frac{a^3}{a+b}-Pa^2+D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1, C_2, D_1, D_2$$

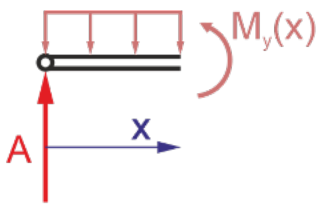
Beispiel: Statisch unbestimmt gelagerter Träger



Geg.: $q_0,\ \ell,\ EJ_y$

Ges.: Auflagereaktionen





$$A + B - q_0\ell = 0 \;\rightarrow\; B = q_0\ell - \mathrm{A}$$

$$M_E + A\ell - q_0\frac{\ell^2}{2} = 0 \;\rightarrow M_E = -A\ell + q_0\frac{\ell^2}{2}$$

$$M(x) = Ax - q_0\frac{x^2}{2}$$

$$EJ_y w'' = -Ax + q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$EJ_y w' = -A\frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EJ_y w = -A\frac{x^3}{6} + q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

RB: $w(x=0) = 0 \rightarrow 0 = C_2$

$$w(x=\ell) = 0 \rightarrow 0 = -A\frac{\ell^3}{6} + q_0\frac{\ell^4}{24} + C_1\ell \quad \Big| \cdot 1$$

$$w'(x=\ell) = 0 \rightarrow 0 = -A\frac{\ell^2}{2} + q_0\frac{\ell^3}{6} + C_1 \quad \Big| \cdot (-\ell)$$

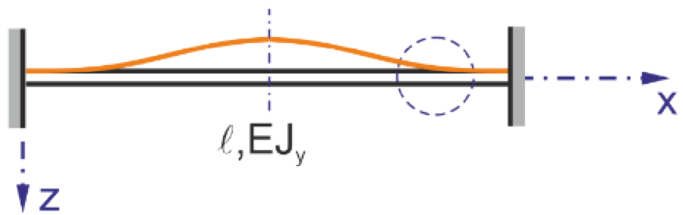
$$0 = \frac{2}{6}A\ell^3 - \frac{3}{24}q_0\ell^4$$

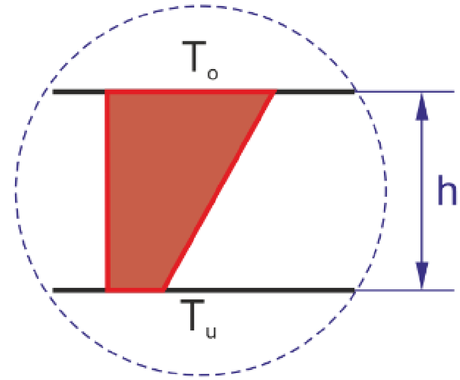
$$\longrightarrow \quad \underline{A = \frac{3}{8}q_0\ell} \qquad \underline{B = \frac{5}{8}q_0\ell} \qquad \underline{M_E = \frac{1}{8}q_0\ell^2}$$

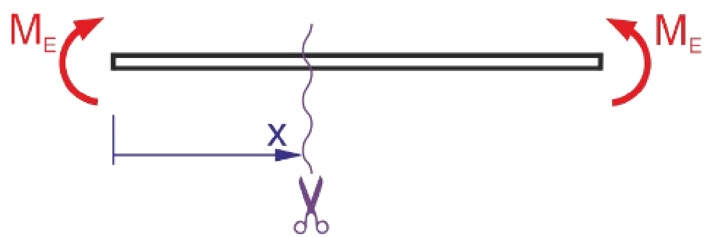
Beispiel: Beidseitig eingespannter Träger, nur durch ein Temperaturmoment belastet

Geg. α, θ, EJ_y, h

Ges.: Auflagereaktionen







$$M(x) = M_E = const.$$

$EJ_y w'' = -M_E - EJ_y \alpha \Theta$ mit $\Theta = \frac{T_u - T_o}{h}$

$EJ_y w' = -M_E x - EJ_y \alpha \Theta x + C_1$

$EJ_y w = -M_E \frac{x^2}{2} - EJ_y \alpha \Theta \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

RB: (1) $w(x=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

(2) $w'(x=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$

(3) $w'(x=\ell) = 0 \rightarrow -\left(M_E + EJ_y \alpha \Theta\right)\ell = 0 \rightarrow M_E = -EJ_y \alpha \theta$

$$\underline{w(x)} = \frac{-1}{EJ_y}\frac{x^2}{2}\left[M_E + EJ_y \alpha \Theta\right] = \underline{0}$$

$$\underline{\sigma_b} = \pm \frac{M_E}{J_y}\frac{h}{2} = \mp \frac{EJ_y \alpha \theta h}{2J_y} = \underline{\mp \frac{1}{2} E \alpha \Theta h}$$

Stab bleibt gerade, aber nicht spannungsfrei.

Anmerkung: Als RB (3) hätte man auch $w(x=\ell) = 0$ oder $w'(x=\ell/2) = 0$ anschreiben können. Man wäre auf dieselbe Lösung gekommen.

12.4.4 Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung

Ausgehend von der Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung (ohne Berücksichtigung eines Temperaturmoments) und den bereits bekannten Beziehungen zwischen den Schnittgrößen des geraden Stabs und einer Streckenlast kann folgender Zusammenhang abgeleitet werden.

$$-EJ_y(x)w'' = M_y(x) \qquad \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-EJ_y(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x) \quad \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ_y(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q(x)$$

also

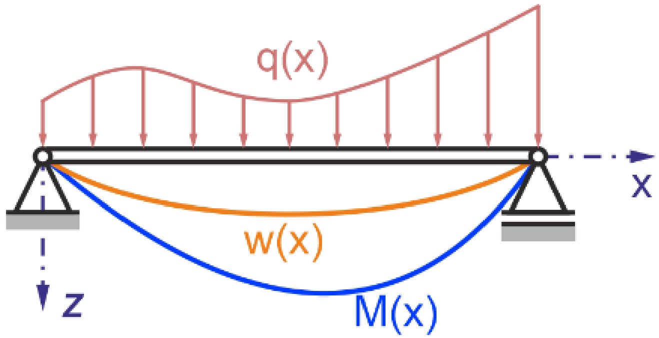
$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ_y(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q(x)}$$

Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung

für EJ_y = konstant gilt dann:

$$\boxed{EJ_y\frac{d^4w}{dx^4} = EJ_y w^{IV} = q(x)}$$

Die DG 4. Ordnung eignet sich insbesondere für die Berechnung der Biegelinie eines Einfeldträgers mit verteilter Last:



Man erhält dann $w(x)$ durch 4-malige Integration. Die damit einhergehenden 4 Integrationskonstanten müssen wieder über Rand- und ggf. Übergangsbedingungen bestimmt werden.

z.B. für den dargestellten Träger:

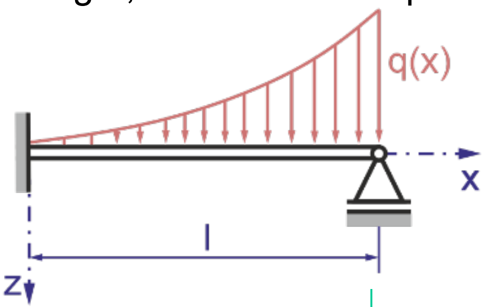
(1) $w(x=0)=0$
(2) $w(x=\ell)=0$
} wesentliche RB

(3) $w''(x=0)=0 \quad \triangleq \quad M(x=0)=0$
(4) $w''(x=\ell)=0 \quad \triangleq \quad M(x=\ell)=0$
} natürliche RB

Beispiel: Statisch unbestimmter Träger, der durch eine quadratische Streckenlast belastet wird

Geg.: $q(x) = q_0 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2$, ℓ, EJ_y

Ges.: Auflagereaktionen



$$EJ_y w^{IV} = q_0 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 = q(x)$$

$$EJ_y w^{III} = \frac{1}{3L^2} q_0 x^3 + C_1 = -Q(x)$$

$$EJ_y w^{II} = \frac{1}{12L^2} q_0 x^4 + C_1 x + C_2 = -M(x)$$

$$EJ_y w^{I} = \frac{1}{60L^2} q_0 x^5 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EJ_y w = \frac{1}{360L^2} q_0 x^6 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

RB:

(1) $w(x=0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

(2) $w'(x=0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

(3) $w(x=\ell) = 0$

(4) $EJ_y w^{II}(x=\ell) = 0$

$$\rightarrow C_1 = -Q(x=0) = -\frac{7}{90} q_0 \ell$$

$$\rightarrow C_2 = -M(x=0) = -\frac{11}{540} q_0 \ell^2$$

$$A_V = \frac{7}{90} q_0 \ell \qquad M_A = \frac{11}{540} q_0 \ell$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$B + A_V - \int_0^L q_0 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = 0$$

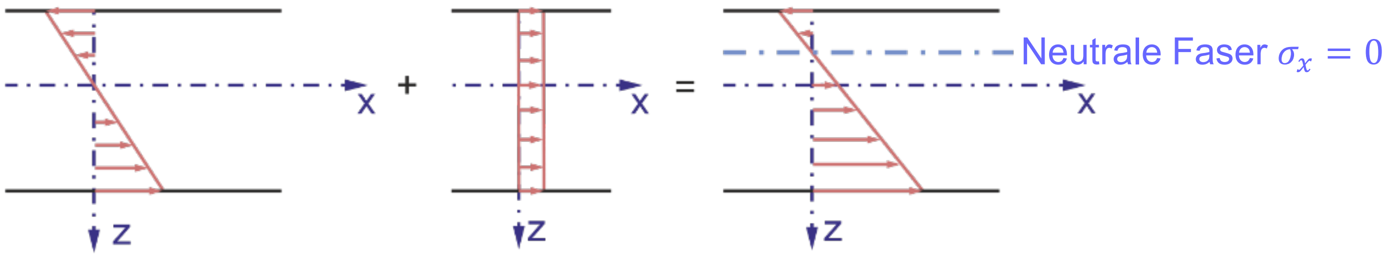
$$B = \frac{23}{90} q_0 \ell$$

12.5 Biegung mit Längskraft

Die Lösungen für einen durch ein Normalkraft $N(x)$ und ein Biegemoment $M_y(x)$ belasteten Stab können gemäß dem Superpositionsprinzip überlagert werden.

$$\boxed{\sigma_x(x,z) = \frac{M_y(x)}{J_y(x)} z + \frac{N(x)}{A(x)}}$$

Das führt zu einer Verschiebung der neutralen Faser.



Diese Verschiebung kann so groß sein, dass die neutrale Faser aus dem Querschnitt herausgeschoben wird. Dadurch treten im gesamten Querschnitt nur noch Zug- oder nur noch Druckspannungen auf, es findet also kein Vorzeichenwechsel von σ_x innerhalb des Querschnitts statt. Diesen Effekt macht man sich beispielsweise bei Spannbeton zu Nutze.

12.6. Biegung von Stäben mit beliebigem Querschnitt

Wir fordern nun nur noch, dass die Stabachse gerade ist und den geometrischen Schwerpunkt aller Querschnitte verbindet. Die y- sowie die z-Achse gehen somit durch diesen Schwerpunkt, haben aber ansonsten eine allgemeine Lage, sind daher i.a. keine Trägheitshauptachsen. Ebenso erlauben wir eine allgemeine Belastung zufolge $N(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$. Querkräfte und Torsionsmoment dürfen ebenfalls ungleich null sein, spielen aber in dieser Betrachtung keine Rolle.

Ausgangspunkt: Aus geometrischen Gründen sind die Dehnungen linear über den Querschnitt verteilt, daher sind bei homogenen Trägern und bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes auch die Spannungen linear verteilt.

$$\sigma_x(x,y,z) = C_0(x) + C_1(x)y + C_2(x)z$$

Zur Erinnerung:

$$N(x) = \int_A \sigma_x(x,y,z)dA = C_0(x)\int_A dA + C_1(x)\int_A ydA + C_2(x)\int_A zdA \quad (1)$$

$$M_y(x) = \int_A z\sigma_x(x,y,z)dA = C_0(x)\int_A zdA + C_1(x)\int_A zydA + C_2(x)\int_A z^2dA \quad (2)$$

$$M_z(x) = -\int_A y\sigma_x(x,y,z)dA = -C_0(x)\int_A ydA - C_1(x)\int_A y^2dA - C_2(x)\int_A yzdA \quad (3)$$

Es treten wieder bereits vertraute Integrale auf:

$\int_A y dA = \int_A z dA = 0$ weil der Koordinatenursprung voraussetzungsgemäß im Schwerpunkt liegt.

$$\int_A y^2 dA = J_z \qquad \int_A z^2 dA = J_y \qquad \int_A zy dA = \int_A yz dA = J_{yz}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= C_0(x)A && (1)\\ M_y(x) &= C_1(x)J_{yz} + C_2(x)J_y && (2)\\ M_z(x) &= -C_1(x)J_z - C_2(x)J_{yz} && (3)\end{aligned}\right\} \text{3 Gleichungen für } C_0(x), C_1(x), C_2(x)$$

Damit kann die Normalspannungsverteilung allgemein angeschrieben werden:

$$\boxed{\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{J_{yz}M_y(x) + J_y M_z(x)}{J_y J_z - J_{yz}^2} y + \frac{J_z M_y(x) + J_{yz} M_z(x)}{J_y J_z - J_{yz}^2} z}$$

Auch bei reiner Belastung in der xz Ebene (also $M_z(x) = 0$) tritt also ein Spannungsgradient in y-Richtung auf. Darüberhinaus kommt es i.a. zu einer Biegung aus der xz-Ebene heraus. Man spricht daher von schiefer Biegung.

Für den Spezialfall, dass es sich bei y und z um Trägheitshauptachsen handelt, wird daraus die leichter zu merkende Formel:

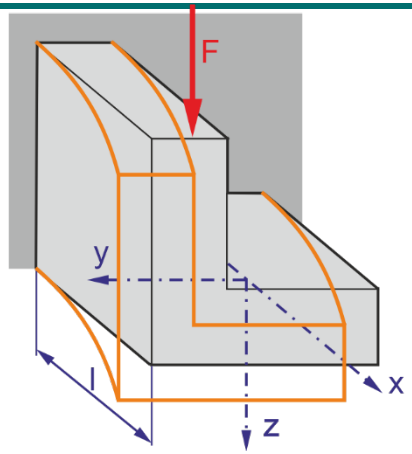
$$\boxed{\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{J_z}y + \frac{M_y(x)}{J_y}z}$$

Die Trägerdurchbiegung hat dann ebenfalls eine zweite Komponente v(x) in y-Richtung. Diese kann in völlig analoger Weise zur z-Komponente w(x) aus einer Differentialgleichung berechnet werden.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= -\left[\frac{M_y(x)}{EJ_y(x)} + \alpha\Theta_y(x)\right] \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= +\left[\frac{M_z(x)}{EJ_z(x)} + \alpha\Theta_z(x)\right] \end{aligned}}$$

Θ_y ...Temperaturmoment um die y-Achse: $\Theta_y(x) = \frac{1}{J_y(x)}\int_A zT(x,y,z)dA$

Θ_z ...Temperaturmoment um die z-Achse: $\Theta_z(x) = \frac{1}{J_z(x)}\int_A yT(x,y,z)dA$



Beispiel: Kragträger mit L-Profil

Geg.: $F,\ \ell,\ E,\ J_y = \frac{217}{60}a^4, J_z = \frac{217}{60}a^4, J_{yz} = -\frac{9}{5}a^4$

Ges.: $\sigma_x(x,y,z)$

Aus den Schnittgrößen folgt:

$$M_y(x) = F(x-l)$$

Prinzipiell lässt sich die Spannungsverteilung mithilfe folgender Formel bestimmen:

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{J_{yz}M_y(x) + J_y M_z(x)}{J_y J_z - J_{yz}^2}y + \frac{J_z M_y(x) + J_{yz}M_z(x)}{J_y J_z - J_{yz}^2}z$$

$$\sigma_x(x,y,z) = 0{,}1829\frac{F(x-l)}{a^4}y + 0{,}3675\frac{F(x-l)}{a^4}z$$

Alternativ lässt sich die Normalspannungsverteilung durch Transformation auf Trägheitshauptachsen berechnen.

Hauptträgheitsmomente:

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

$$J_1 = \frac{65}{12}a^4 \qquad J_2 = \frac{109}{60}a^4$$

Damit ein Hauptträgheitszustand vorliegt muss das KS gedreht werden.

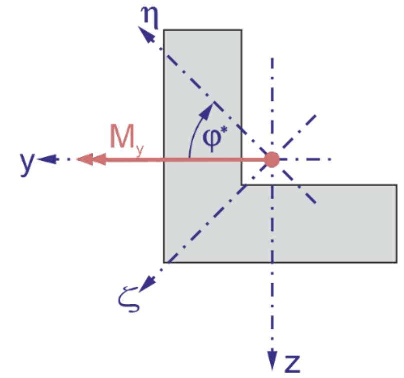
$$tan2\varphi^* = \frac{2J_{yz}}{J_z - J_y}$$

$$\varphi^* = -\frac{\pi}{4}$$

Die Zuordnung der Hauptträgheitsachsen erfolgt mithilfe der Transformationsformeln für Trägheitsmomente.

$$J_\eta = \frac{1}{2}(J_y + J_z) + \frac{1}{2}(J_y - J_z)cos2\varphi^* \underbrace{- J_{yz}sin2\varphi^*}_{<0}$$

$$J_\zeta = \frac{1}{2}(J_y + J_z) - \frac{1}{2}(J_y - J_z)cos2\varphi^* \underbrace{+ J_{yz}sin2\varphi^*}_{>0}$$



Somit lassen sich den beiden verdrehten Koordinatenachsen η und ζ das maximale und das minimale Hauptträgheitsmoment zuordnen

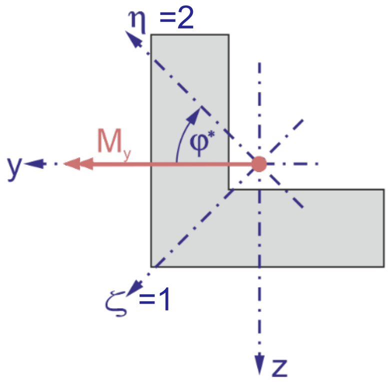
$$J_\zeta = J_1 = \frac{65}{12}a^4$$

$$J_\eta = J_2 = \frac{109}{60}a^4$$

Nun spalten wir den Biegemomentenvektor im Trägheitshauptachsensystem auf.

$$M_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} F(x-l)$$

$$M_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} F(x-l)$$



Koordinatentransformation:

$$\eta = y\cos\varphi^* + z\sin\varphi^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-z)$$

$$\zeta = z\cos\varphi^* - y\sin\varphi^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)$$

Somit können wir nun die Spannungsverteilung berechnen:

$$\sigma_x(x,\eta,\zeta) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_1(x)}{J_1}\eta + \frac{M_2(x)}{J_2}\zeta = -\frac{F(x-l)}{2J_1}(\mathrm{y}-\mathrm{z}) + \frac{F(x-l)}{2J_2}(\mathrm{y}+\mathrm{z})$$

$$\sigma_x(x,y,z) = 0{,}1829\frac{F(x-l)}{a^4}y + 0{,}3675\frac{F(x-l)}{a^4}z$$

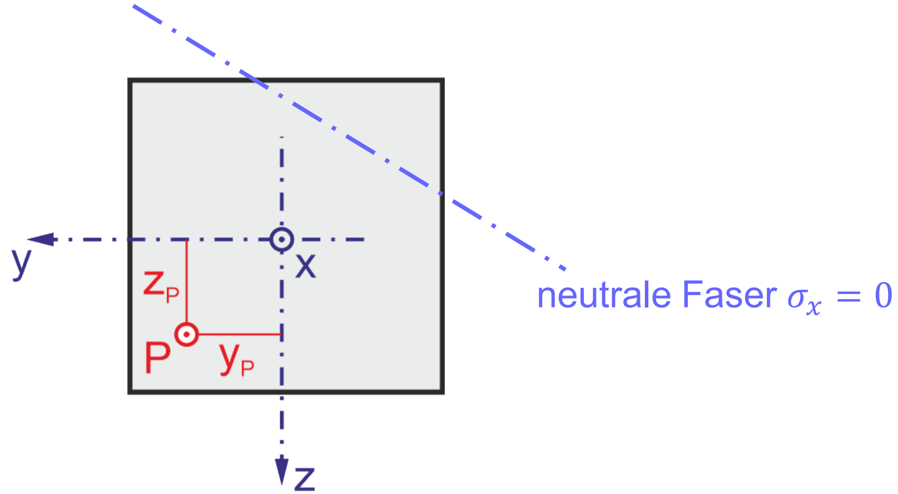
Das Ergebnis stimmt mit jenem aus der allgemeinen Formel überein.

Wir betrachten nun den Fall eines durch eine Kraft in x-Richtung belasteten Stabs. Fällt die Wirkungslinie dieser Kraft P nicht mit der Stabachse (also der x-Achse) zusammen, so resultieren daraus neben der Normalkraft N i.a. auch noch die Biegemomente M_y und M_z.

$$N = P$$

$$M_y = P z_P$$

$$M_z = -P y_P$$



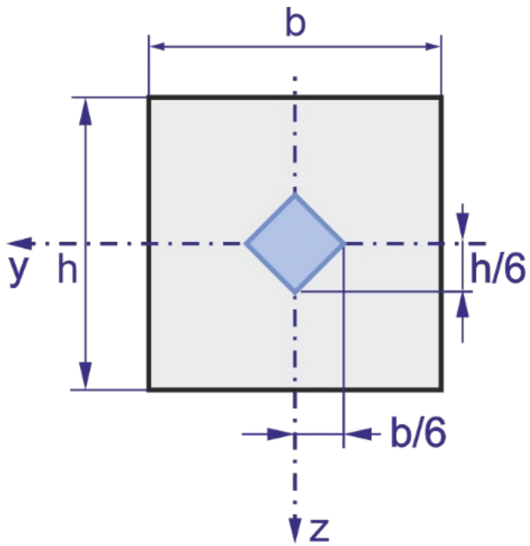
Die neutrale Faser ist durch folgende Geradengleichung definiert:

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{M_y J_z}{M_z J_y} z + \frac{N J_z}{M_z A} = -\frac{z_P J_z}{y_P J_y} z - \frac{J_z}{y_P A}$$

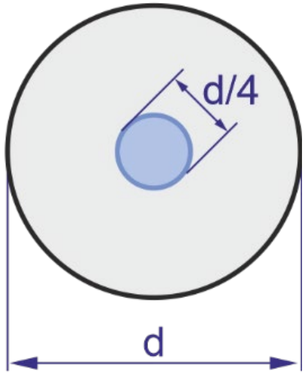
Insbesondere im Bauingenieurwesen ist es häufig gefordert, dass im gesamten Querschnitt die Normalspannungen σ_x ein einheitliches Vorzeichen besitzen. Die Frage lautet nun, innerhalb welchen Bereichs der Angriffspunkt einer äußeren Längskraft liegen muss, damit diese Vorgabe erfüllt wird.

Man nennt diesen Bereich dann die Kernfläche des Profils.

Beispiel: Kernfläche eines Rechteckprofils



Beispiel: Kernfläche eines Kreisprofils



12.7 Verbundträger

Verbundträger sind ein Resultat aus der Forderung nach einerseits möglichst hoher Steifigkeit und andererseits möglichst geringem Eigengewicht.

Mit folgenden Annahmen

- Vernachlässigung von Querkontraktionseffekten
- Vernachlässigung von Schubspannungen und Annahme der Schubstarrheit
- Ideale Verbindung der Teilquerschnitte

kann man von einer linearen Dehnungsverteilung über den Querschnitt (kinematische Verträglichkeit) ausgehen.

Die grundlegenden Beziehungen zur analytischen Betrachtung von Verbundträgern wurden bereits vorgestellt. Sie werden hier nochmals zusammengefasst.

Hookesches Gesetz:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\mathrm{E}}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha\Delta T$$

Zusammenhang Spannungen und Schnittgrößen:

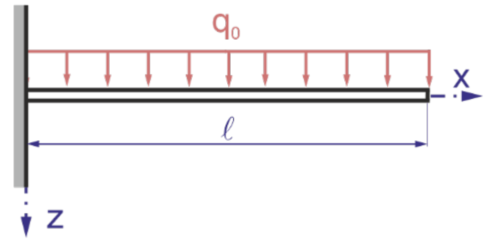
$$N(x) = \int_A \sigma_x(x,y,z)dA$$

$$M_y(x) = \int_A z\sigma_x(x,y,z)dA$$

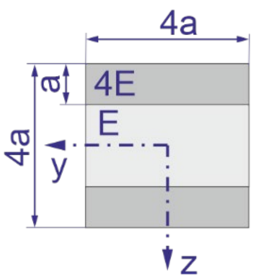
12.7 Verbundträger

Beispiel: Verbundträger:

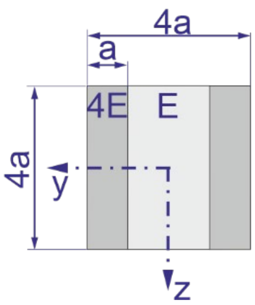
Geg.: $q_0,\ \ell,\ E, a$



Fall 1:



Fall 2:



Ges.: Spannungsverteilung +Biegelinie

$$M_A = \frac{1}{2} q_0 \ell^2 \qquad A_V = q_0 \ell$$

$$M_y(x) = q_0 \ell \mathrm{x} - \frac{1}{2} q_0 \ell^2 - \frac{1}{2} q_0 \mathrm{x}^2$$

Betrachten wir zunächst den Fall 1:

Es liegt eine lineare Dehnungsverteilung über den Querschnitt vor

$$\varepsilon_x(x,z) = k(x) z + \cancel{d}$$

Da Materialsymmetrie bzgl. Biegeachse

Hookesches Gesetz:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x3} = 4\mathrm{E}\varepsilon_x = 4Ek(x)z$$

$$\sigma_{x2} = \mathrm{E}\varepsilon_x = Ek(x)z$$

Zusammenhang Schnittgrößen:

$$M_y(x) = \int_A z \sigma_x(x,y,z) dA$$

$$M_y(x) = \int_{-2a}^{-a} 16Ek(x)z^2 a dz + \int_{-a}^{a} 4Ek(x)z^2 a dz + \int_{a}^{2a} 16Ek(x)z^2 a dz$$

$$k(x) = \frac{3}{464Ea^4} q_0(2\ell x - l^2 - x^2)$$

$$\sigma_{x1}(x,z) = \frac{3}{116a^4} q_0(2\ell x - l^2 - x^2)z$$ Für $-2a \leq z \leq -a$

$$\sigma_{x2}(x,z) = \frac{3}{464a^4} q_0(2\ell x - l^2 - x^2)z$$ Für $-a \leq z \leq a$

$$\sigma_{x3}(x,z) = \frac{3}{116Ea^4} q_0(2\ell x - l^2 - x^2)z$$ Für $a \leq z \leq 2a$

Betrachten wir nun den Fall 2:
Es liegt eine lineare Dehnungsverteilung über den Querschnitt vor

$$\varepsilon_x(x,z) = k(x)z + \cancel{d}$$ Da Materialsymmetrie bzgl. Biegeachse

Hookesches Gesetz:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x3} = 4\mathrm{E}\varepsilon_x = 4Ek(x)z$$

$$\sigma_{x2} = \mathrm{E}\varepsilon_x = Ek(x)z$$

Zusammenhang Schnittgrößen:

$$M_y(x) = \int_A z\sigma_x(x,y,z)dA$$

$$M_y(x) = \int_{-2a}^{2a} 4Ek(x)z^2 adz + \int_{-2a}^{2a} 2Ek(x)z^2 adz + \int_{-2a}^{2a} 4Ek(x)z^2 adz$$

$$k(x) = \frac{3}{320Ea^4} q_0 (2\ell x - l^2 - x^2)$$

$$\sigma_{x1}(x,z) = \frac{3}{80a^4} q_0 (2\ell x - l^2 - x^2) z$$ Für $-2a \leq z \leq -a$

$$\sigma_{x2}(x,z) = \frac{3}{320a^4} q_0 (2\ell x - l^2 - x^2) z$$ Für $-a \leq z \leq a$

$$\sigma_{x3}(x,z) = \frac{3}{80a^4} q_0 (2\ell x - l^2 - x^2) z$$ Für $a \leq z \leq 2a$