

## 11. Verzerrungsenergie



## 11.1 Grundbegriffe

Zieht man ein Volumenelement mit der Kantenlänge  $a$  in Richtung der Spannungshauptachse 1 in die Länge, so wird folgende Arbeit  $W$  verrichtet:

$$W = \int F ds \text{ mit } F = \lambda \sigma_1 a^2 \text{ und } ds = d\lambda \varepsilon_1 a.$$

$\lambda$  entspricht dabei einem dimensionslosen Laststeigerungsfaktor. Ein gleichzeitiges Belasten in Richtung 2 und 3 führt zu analogen Beiträgen. Insgesamt ergibt sich nach Integration:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 a^3 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 a^3 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 a^3 \quad | : a^3$$

$$\rightarrow U' = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

Transformation auf beliebige Achsen  $x, y, z$  liefert nach Einsetzen von  $\sigma_1 = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$ ,  $\sigma_2 = \underline{m}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{m}$ ,  $\sigma_3 = \underline{l}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{l}$  und unter Beachtung von  $\underline{n} \perp \underline{m} \perp \underline{l} \equiv \underline{e}_1 \perp \underline{e}_2 \perp \underline{e}_3$ :

$$U' = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Einbau des Hookeschen Gesetzes liefert für die einzelnen Summanden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_x}{2} 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\nu e}{1 - 2\nu} \right) = G \left( \varepsilon_x^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \varepsilon_x \right) & \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 \\ \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon_y}{2} 2G \left( \varepsilon_y + \frac{\nu e}{1 - 2\nu} \right) = G \left( \varepsilon_y^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \varepsilon_y \right) & \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} G \gamma_{yz}^2 \\ \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z &= \frac{\varepsilon_z}{2} 2G \left( \varepsilon_z + \frac{\nu e}{1 - 2\nu} \right) = G \left( \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \varepsilon_z \right) & \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} G \gamma_{zx}^2 \end{aligned}$$

und somit kann schließlich  $U'$  durch die Verzerrungen ausgedrückt werden:

$$U' = G \left[ \left( \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e^2 \right) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]$$

$U'$  ... **Verzerrungsenergiedichte (strain energy density)** [N/m<sup>2</sup>]

$U$  .... **Verzerrungsenergie (strain energy)** [Nm]

Zur Erinnerung:  $e$  ist die erste Invariante des Verzerrungstensors, also  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ . Sie entspricht unmittelbar der Volumsdehnung  $\Delta V/V$ .

Man kann aber auch umgekehrt Dehnungen durch Spannungen ausdrücken:

$$U' = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

$$\frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{2E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2$$

$$\frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{2E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}^2$$

$$\frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{2E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx}^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) = \\ & = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \\ & = \frac{1}{2E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1 + \nu)(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \\ & = \frac{1 + \nu}{2E} \left[ \frac{9p^2}{1 + \nu} - 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \\ & = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^{*'} &= \frac{1+\nu}{2E} \left[ \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{1+\nu} - 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_x + \sigma_y\sigma_z) + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] \\
 &= \frac{1+\nu}{2E} \left[ \frac{9p^2}{1+\nu} - 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_x + \sigma_y\sigma_z) + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:  $p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

Mit Verwendung der Invarianten des Spannungstensors

$$I_1 = 3p = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_x + \sigma_y\sigma_z) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

wird daraus:

$$U^* = \frac{1+\nu}{2E} \int_V \left( \frac{I_1^2}{1+\nu} + 2I_2 \right) dV$$

$U^{*'} \dots$  **Ergänzungsenergiedichte (complementary strain energy density)** [N/m<sup>2</sup>]

$U^* \dots$  **Ergänzungsenergie (complementary strain energy)** [Nm]

Offensichtlich ist (wie zu erwarten)  $U^*$  von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.

Wir setzen nun

$$I_2 = J_2 - \frac{1}{3}I_1^2$$

$$J_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - (s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x) \dots 2. \text{ Invariante des Deviators}$$

Zur Erinnerung:  $\underline{s} = \underline{\sigma} - p\underline{I} = \begin{pmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{pmatrix} \dots$  **Deviator**

$$U^* = \frac{1+\nu}{2E} \int_V \left( \frac{I_1^2}{1+\nu} + 2J_2 - \frac{2}{3}I_1^2 \right) dV = \frac{1-2\nu}{6E} \int_V I_1^2 dV + \frac{1+\nu}{E} \int_V J_2 dV$$

Volumsänderungsenergie  $U_V^*$     Gestaltänderungsenergie  $U_G^*$

Bei Berücksichtigung der thermischen Dehnungen müssen diese von der Gesamtdehnung abgezogen werden, z.B. gilt für die x-Richtung:

$$\frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x^{el} = \frac{1}{2} \sigma_x (\varepsilon_x - \alpha_T \Delta T)$$

Die ansonsten gleiche Vorgehensweise wie vorher führt auf

$$U' = G \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} e^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] - \frac{E}{1-2\nu} e \alpha_T \Delta T + \frac{3}{2} \frac{E}{1-2\nu} \alpha_T^2 \Delta T^2$$

analog für  $U^{*l}$ :

$$U^{*l} = \frac{1+\nu}{2E} \left[ \frac{9p^2}{1+\nu} - 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_z \sigma_x + \sigma_y \sigma_z) + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] + 3\alpha_T \Delta T p$$

bzw.:

$$U^* = \frac{1-2\nu}{6E} \int_V I_1^2 dV + \frac{1+\nu}{E} \int_V J_2 dV + \int_V 3\alpha_T \Delta T p dV$$

Volumsänderungsenergie  $U_V^*$     Gestaltänderungsenergie  $U_G^*$

$$U_V^{*'} = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2$$

$$U_G^{*'} = \frac{1+\nu}{E} J_2 = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Beachte: für  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p \Rightarrow U_G^{*'} = 0$

für  $\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow U_V^{*'} = 0$

### 11.2 Vergleichsspannungshypothesen

Es stellt sich die Frage, wie man den Spannungszustand mit einem in einem Experiment ermittelten Festigkeitskennwert vergleichen kann. Dazu muss man erst aus dem Spannungstensor ein für den Werkstoff relevantes Vergleichsmaß generieren.

Ein solches kann beispielsweise aus einer **Anstrengungshypothese** auf Grundlage der Verzerrungsenergie gewonnen werden. Im folgenden sind die am weitesten verbreiteten Vergleichsspannungshypothesen angeführt:

#### ➔ 11.2.1 Gestaltänderungsenergiehypothese (GÄEH) nach **Huber, von Mises, Hencky** (HMH)

Sie gilt in erster Linie für **duktile** Werkstoffe und geht davon aus, dass plastisches Fließen eintritt, wenn die aus der **Gestaltänderungsenergie(-dichte)**  $U_G^{*}$  berechnete Vergleichsspannung die im Zugversuch bestimmte Fließgrenze des Materials erreicht.

Ein Zugversuch erzeugt einen einachsigen Spannungszustand im Probestab, also:

$$\sigma_x = \sigma_y, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

Die zugehörige Gestaltänderungsenergiedichte beträgt im Zugstab:

$$U_G^{*'} = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_v^2$$

Für einen allgemeinen dreiachsigen Spannungszustand haben wir  $U_G^{*'}$  schon kennengelernt:

$$U_G^{*'} = \frac{1 + \nu}{6E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1 + \nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich, so ergibt sich die Vergleichsspannung nach HMM wie folgt:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]}$$

bzw. falls es sich um einen Hauptnormalspannungszustand handelt:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

Um ein plastisches Versagen der Konstruktion zu vermeiden, muss  $\sigma_v$  kleiner (höchstens gleich) einer zulässigen Grenze sein. Diese ergibt sich beispielsweise aus der Streckgrenze  $R_e$  und einer Sicherheit gegen plastisches Versagen  $S_F$ :

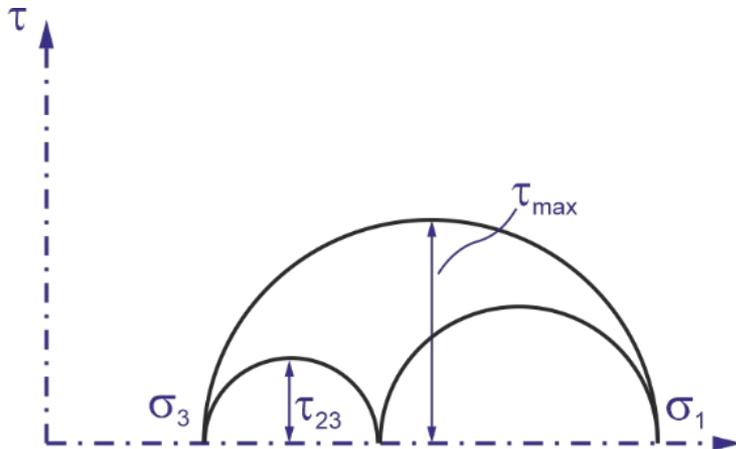
$$\sigma_v \leq \sigma_{zul} \quad \sigma_{zul} = R_e / S_F$$

## ➔ 11.2.2 Schubspannungshypothese nach Tresca

Sie gilt nur für **duktile** Werkstoffe und geht davon aus, dass plastisches Fließen dann eintritt, wenn die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  ein gewisses kritisches Maß erreicht.

$\tau_{\max}$  entspricht aber genau dem Radius des Mohrschen Spannungskreises. Im allgemeinen dreiachsigen Fall ist die größtmögliche Schubspannung demnach

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \text{ wobei die } \sigma_1 \text{ größte HNS und } \sigma_3 \text{ die kleinste HNS bedeutet.}$$



Im Vergleich dazu beträgt die maximale Schubspannung beim Zugversuch  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_v}{2}$ .

Aus dem Vergleich ergibt sich das Vergleichsspannungskriterium nach Tresca:

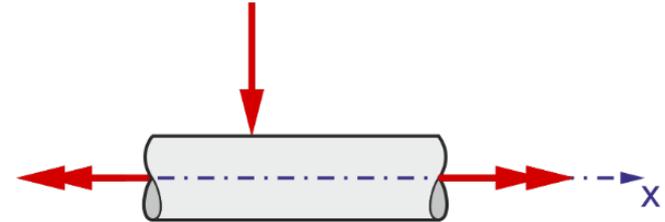
$$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{zul}$$

**Beispiel:** Anwendung der Vergleichsspannungshypothesen auf zylindrische Stäbe

Eine auf Biegung und Torsion belastete Welle ist durch folgenden Spannungszustand charakterisiert:

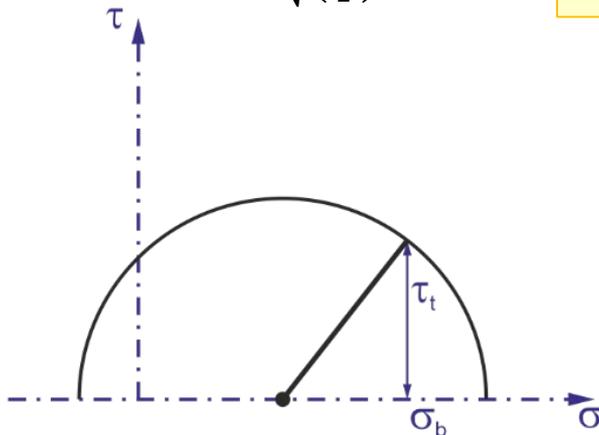
Biegespannung  $\sigma_b = \sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = 0,$

Torsionsschubspannung  $\tau_t = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \neq 0, \tau_{yz} = 0$



Nach **HMH** gilt  $\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[2\sigma_b^2 + 6\tau_t^2]} \Rightarrow \sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$

Nach **Tresca** gilt  $\sigma_v = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2} \Rightarrow \sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$



### ➔ 11.2.3 Normalspannungshypothese nach Rankine

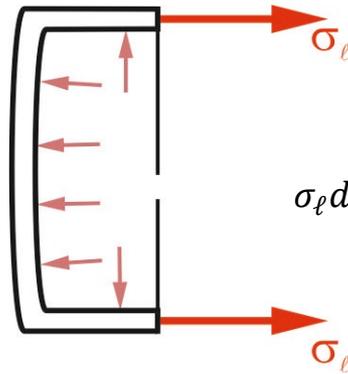
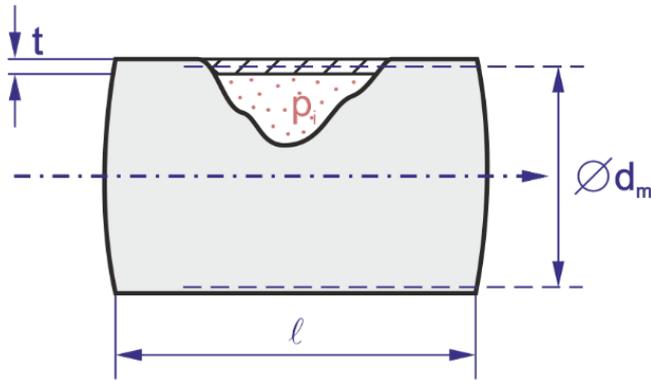
Sie gilt nur für **spröde** Werkstoffe und geht davon aus, dass spröder Bruch dann eintritt, wenn die größte Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  ein gewisses kritisches Maß erreicht.

$$\sigma_v = \sigma_1 \leq \sigma_{zul}$$

Ein entstehender Riss wird sich in einer Ebene normal zur Richtung der größten HNS ausbreiten.

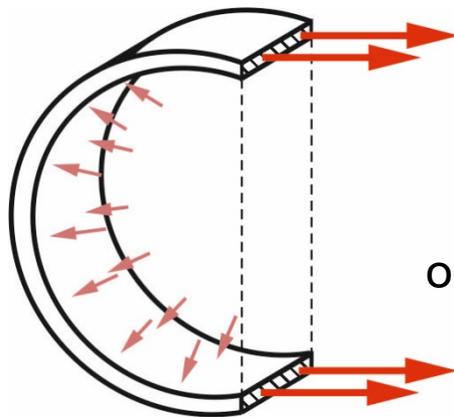
## 11.3 Kesselgleichungen

Ein **dünnwandiger** Kessel (mittlerer Durchmesser  $d_m$ , Wandstärke  $t$ ) wird durch einen Innendruck  $p_i$  belastet. Die entstehenden Spannungen können aufgrund einfacher Gleichgewichtsüberlegungen berechnet werden:

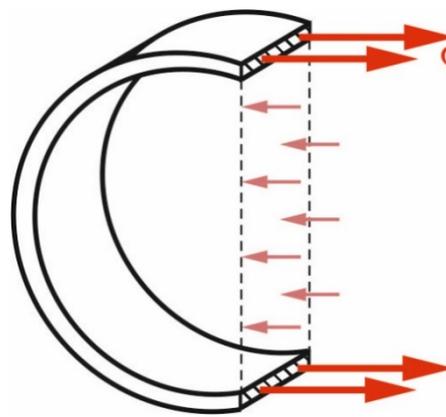


Längsspannung  $\sigma_l$

$$\sigma_l d_m \pi t = p_i \frac{d_m^2 \pi}{4} \Rightarrow \sigma_l = \frac{p_i d_m}{4t}$$



oder



$\sigma_t$  oder  $\sigma_\phi$

Umfangsspannung  $\sigma_t$

$$2\sigma_t t \ell = p_i d_m \ell \Rightarrow \sigma_t = \frac{p_i d_m}{2t}$$

Zusammenfassung:

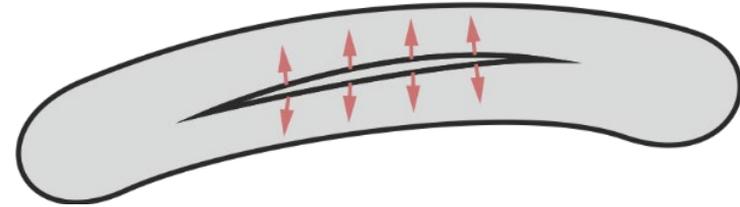
$$\sigma_r = -p_i \approx 0$$

$$\sigma_\ell = \frac{p_i d_m}{4t}$$

$$\sigma_t = \frac{p_i d_m}{2t}$$

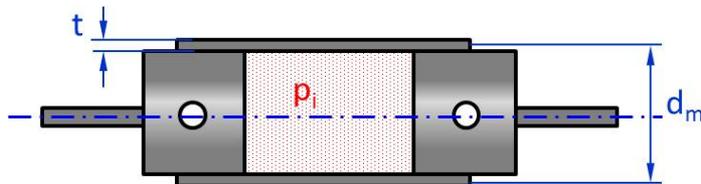
Kesselgleichungen

Merkhilfe für Längs- und Umfangsspgen: Aufplatzen eines Frankfurter-Wurstels in Längsrichtung:



Man beachte, dass die **Radialspannungen**  $\sigma_r$  beim dünnwandigen Kessel im Vergleich zu den Längs- oder Umfangsspannungen klein sein werden und daher häufig vernachlässigt werden können.

Beachte: Die **Berechnung der Längsspannungen** ist von den Randbedingungen abhängig. Ggf. müssen die Längsspannungen aus anderen Überlegungen gewonnen werden, wie z.B. im folgenden Fall:



Im skizzierten Fall ist  $\sigma_\ell = 0!$

Bei reiner Innendruckbelastung liefern die Kesselgleichungen einen Hauptnormalspannungszustand.

$$\sigma_r = \sigma_3$$

$$\sigma_\ell = \sigma_2$$

$$\sigma_t = \sigma_1$$

Häufig muss bei gegebenem Durchmesser, Innendruck und Materialvorgabe die erforderliche Wandstärke  $t_{erf}$  des Kesselblechs berechnet werden. Dazu bedient man sich einer geeigneten Vergleichsspannungshypothese (im Behälterbau zumeist für duktile Materialien).

Nach **VMH** gilt

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p_i d_m}{4t} \right)^2 + \left( \frac{p_i d_m}{4t} \right)^2 + \left( \frac{p_i d_m}{2t} \right)^2 \right]} \Rightarrow$$

$$\sigma_v = \frac{p_i d_m}{4t} \sqrt{3} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \underline{t_{erf} \geq \frac{\sqrt{3} p_i d_m}{4 \sigma_{zul}}}$$

Nach **Tresca** gilt

$$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p_i d_m}{2t} \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \underline{t_{erf} \geq \frac{1}{2} \frac{p_i d_m}{\sigma_{zul}}}$$

Welche Hypothese ist also strenger (führt also zu dickeren Bauteilen)?