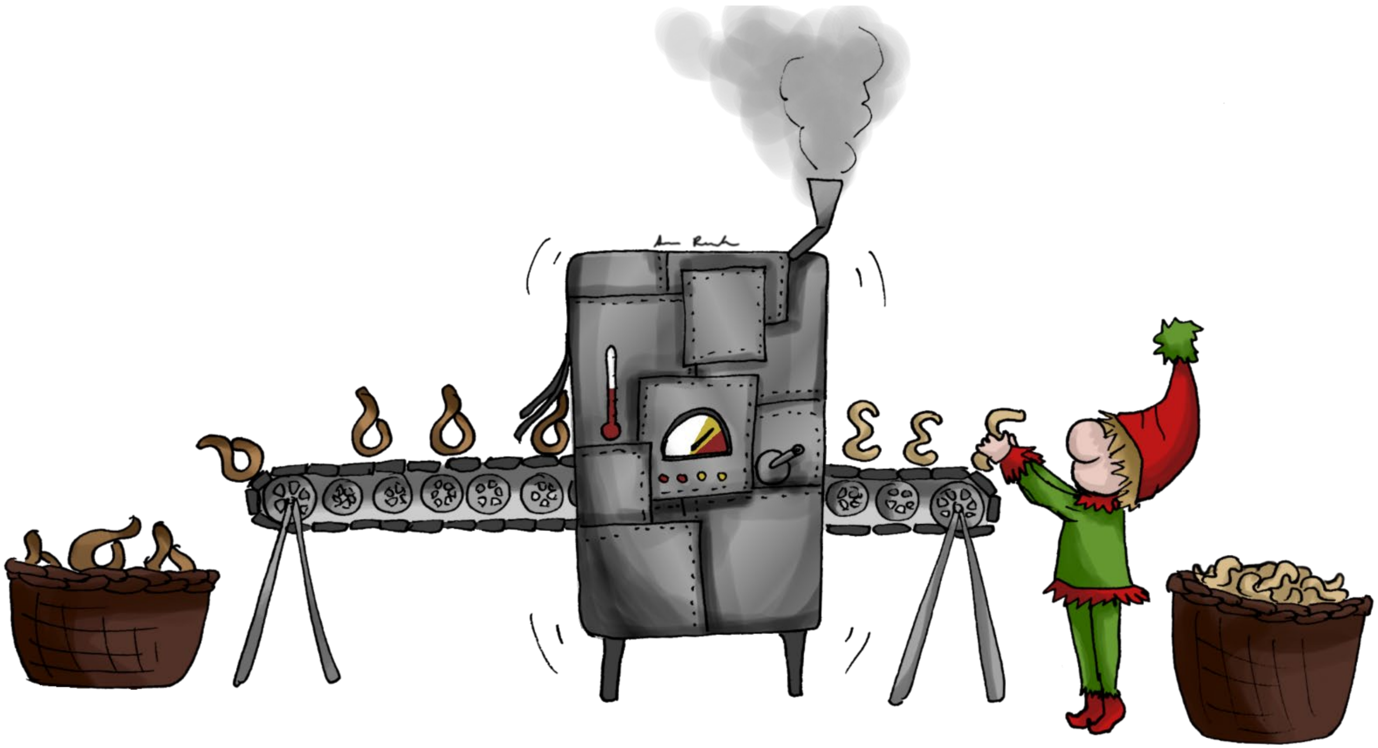
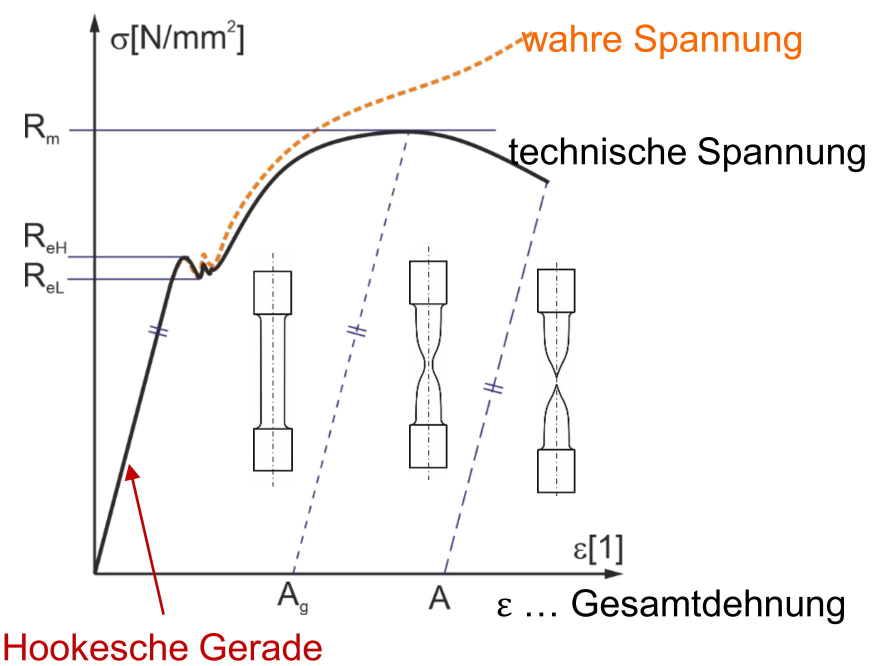
10. Stoffgesetze

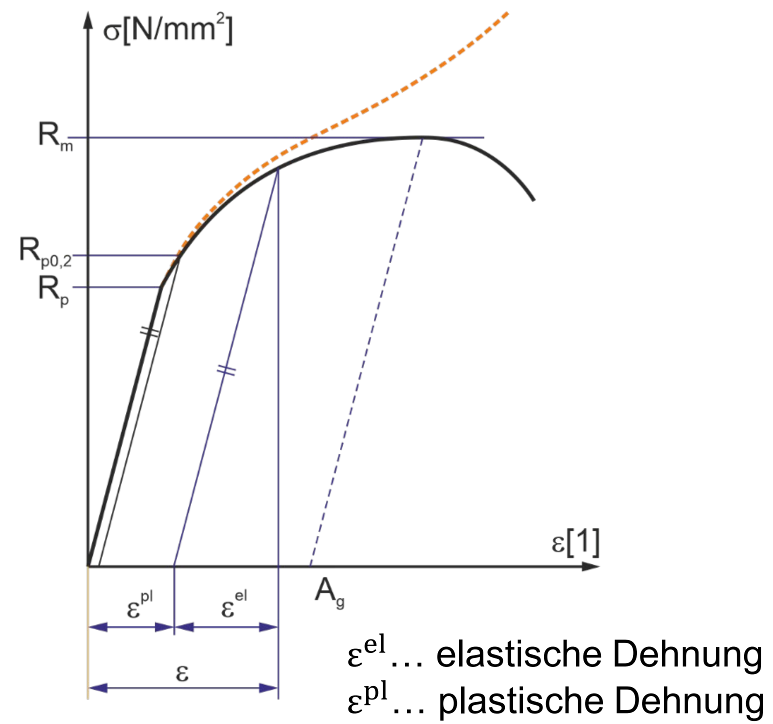


10.1 Grundbegriffe

Wir suchen nach einem Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungstensor. Einige wichtige Kenngrößen können bereits aus einem Zugversuch gewonnen werden.

z.B.: Werkstoffe mit ausgeprägter Streckgrenze bzw. ohne ausgeprägte Streckgrenze





Einige wichtige Kenngrößen:

R_m ……… Zugfestigkeit (UTS – ultimate tensile strength) [N/mm²]
R_e ………. Streckgrenze (yield strength) [N/mm²]
R_{eH} ……….obere Streckgrenze (upper yield strength) [N/mm²]
R_{eL} ………. untere Streckgrenze (lower yield strength) [N/mm²]
R_p ………. Proportionalitätsgrenze (proportionality limit) [N/mm²]
$R_{p0,2}$ ……. Dehngrenze bei 0.2% plast. Dehnung (0.2% proof strength) [N/mm²]
A_g ………. Gleichmaßdehnung (uniform elongation) [1]
A ………… Bruchdehnung (fracture strain) [1]

Die Steigung der Hookeschen Gerade wird als Elastizitätsmodul (Young's modulus) bezeichnet. Auf diesen wird später noch genauer eingegangen.

Spannungen und Dehnungen werden beim Zugversuch aus der Kraft- bzw. Wegmessung errechnet. Dabei bezieht man sich in der Prüftechnik klassischerweise auf die Ausgangslänge bzw. den Ausgangsquerschnitt und erhält somit technische Größen. Diese unterscheiden sich von den wahren Größen, die sich aus der Bezugnahme auf die aktuelle Länge und den aktuellen Querschnitt ergeben. Die Unterschiede machen sich aber erst bei größeren Verformungen bemerkbar.

Technische Dehnung ε:

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell}{\ell_0} - 1$$

Wahre Dehnung φ:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{d\ell}{\ell} \rightarrow \varphi = \ln\ell - \ln\ell_0 = \ln\frac{\ell}{\ell_0} = \ln(1+\varepsilon)$$

$$\boxed{\varphi = \ln(1+\varepsilon)}$$

bzw. $\varphi \approx \varepsilon$ für kleine φ, ε

Technische Spannung S:

$$S = \frac{P}{A_0}$$

(Bezugnahme auf Ausgangsquerschnitt)

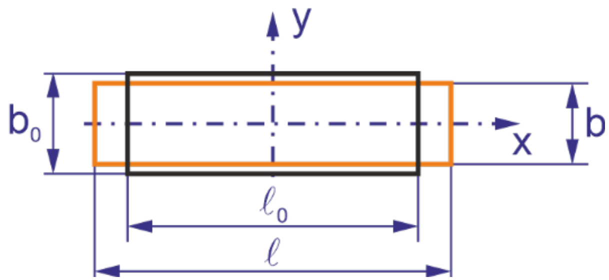
Wahre Spannung σ:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(Bezugnahme auf aktuellen Querschnitt)

Querdehnung:

$$\varepsilon_\ell \cdot \ell_0 = \Delta\ell = \ell - \ell_0$$



$$\varepsilon_q = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{b-b_0}{b_0} = \frac{\Delta b}{b_0} < 0, \text{ wenn } \varepsilon_\ell > 0$$

$\nu = \left|\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_\ell}\right|$ Querkontraktionszahl = Poisson Zahl

Für isotrope Materialien gilt: $0 \leq \nu \leq 0.5$

Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl für ausgewählte Materialien:

Stahl:	E = 210000 N/mm² = 210 GPa,	$\nu = 0.3$
Aluminium:	E = 70000 N/mm² = 70 GPa,	$\nu = 0.34$
Gummi:	E = 50-5000 N/mm²	$\nu \approx 0.5$ (d.h. inkompressibel)
Beton:	E = 20-40 GPa	$\nu = 0.2$
Diamant:	E $\approx$ 1150 GPa	$\nu = 0.07$

10.2 Hookesches Gesetz (Hooke's law)

für lineare Elastizität, also in einem Spannungsbereich < R_p (≈ R_e)

Darüberhinaus beschränken wir uns in weiterer Folge auf isotropes Verhalten.

Zunächst gilt für die Spgs-hauptachsen:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \qquad (*)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

aufgelöst nach Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_1 = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)$$
$$\sigma_2 = 2G\left(\varepsilon_2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \qquad (**)$$
$$\sigma_3 = 2G\left(\varepsilon_3 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)$$

E .... Elastizitätsmodul [N/mm²]

ν …. Querkontraktionszahl [1]

G …. Schubmodul [N/mm²]

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

weil für einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c gilt:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{a(1+\varepsilon_1)b(1+\varepsilon_2)c(1+\varepsilon_3) - abc}{abc} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e$$

Alle Produkte von ε_1, ε_2 und ε_3 verschwinden näherungsweise.

Transformation auf allg. Koordinatensystem:

$$\sigma_x = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3$$
$$\sigma_y = \underline{m}^T \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{m} = m_1^2\sigma_1 + m_2^2\sigma_2 + m_3^2\sigma_3 \qquad (\Delta)$$
$$\tau_{xy} = \underline{m}^T \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = n_1 m_1\sigma_1 + n_2 m_2\sigma_2 + n_3 m_3\sigma_3$$

detto für $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

$$\varepsilon_x = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{n} = n_1^2\varepsilon_1 + n_2^2\varepsilon_2 + n_3^2\varepsilon_3$$
$$\varepsilon_y = \underline{m}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{m} = m_1^2\varepsilon_1 + m_2^2\varepsilon_2 + m_3^2\varepsilon_3 \qquad (\Delta\Delta)$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma_{xy} = \underline{m}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{n} = n_1 m_1\varepsilon_1 + n_2 m_2\varepsilon_2 + n_3 m_3\varepsilon_3$$

detto für $\varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

Einsetzen in (Δ) für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus dem Hookeschen Gesetz $(**)$ liefert beispielsweise für σ_x bzw. τ_{xy}:

$$\sigma_x = 2G\left[n_1^2\left(\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) + n_2^2\left(\varepsilon_2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) + n_3^2\left(\varepsilon_3 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)\right] = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)$$

weil $|\underline{n}| = 1$, also $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

$$\tau_{xy} = 2\mathrm{G}\left[n_1 m_1\left(\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) + n_2 m_2\left(\varepsilon_2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) + n_3 m_3\left(\varepsilon_3 + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)\right] = \mathrm{G}\gamma_{xy}$$

weil $\underline{n} \perp \underline{m}$, also $n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0$.

Die Formeln für $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ergeben sich völlig analog durch zyklisches Vertauschen der Indizes.

Genauso gut hätte man ε_1, ε_2 und ε_3 aus $(*)$ in $(\Delta\Delta)$ einsetzen können:

$$\varepsilon_x = n_1^2 \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + n_2^2 \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] + n_3^2 \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{xy} = n_1 m_1 \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + n_2 m_2 \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] + n_3 m_3 \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\tau_{xy} - \nu\sigma_1(n_2 m_2 + n_3 m_3) - \nu\sigma_2(n_3 m_3 + n_1 m_1) - \nu\sigma_3(n_1 m_1 + n_2 m_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\tau_{xy} + \nu(\sigma_1 n_1 m_1 + \sigma_2 n_2 m_2 + \sigma_3 n_3 m_3)\right] = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

Wieder haben wir dabei folgende Zusammenhänge ausgenutzt:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Die Formeln für ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{zx} ergeben sich völlig analog durch zyklisches Vertauschen der Indizes.

Zusammenfassend kann man das Hookesche Gesetz also folgendermaßen anschreiben

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \qquad \tau_{xy} = \mathrm{G}\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \qquad \tau_{yz} = \mathrm{G}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \qquad \tau_{zx} = \mathrm{G}\gamma_{zx}$$

Leichter zu merken ist es wohl in inverser Form:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

E .... Elastizitätsmodul (Young's modulus) [N/mm²] bzw. [MPa]

G …. Schubmodul (shear modulus) [N/mm²] bzw. [MPa]

ν …. Querkontraktionszahl (Poisson's ratio) [1]

Eine noch allgemeinere Formulierung erhalten wir, wenn wir die thermischen Dehnungen zufolge einer Temperaturänderung ΔT mitberücksichtigen. Bei isotropen Medien bewirken diese eine spannungsfreie Längsänderung in allen drei Raumrichtungen, jedoch keine Winkeländerung.

α_T …. Wärmeausdehnungskoeffizient (coefficient of thermal expansion) [1/K]

Zusammenfassend kann man das Hookesche Gesetz also folgendermaßen anschreiben

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T \Delta T\right) \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T \Delta T\right) \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T \Delta T\right) \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

Leichter zu merken ist es wohl in inverser Form:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

Aufgrund seiner zentralen Bedeutung in der Festigkeitslehre sei das Hookesche Gesetz hier noch einmal zusammengefasst:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

bzw. in der inversen Form:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T \Delta T\right) \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T \Delta T\right) \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_T \Delta T\right) \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Manchmal ist es günstiger, das Hookesche Gesetz alternativ anzuschreiben (es wird wieder nur der isotherme Fall betrachtet). Für die Normalspannungen schreiben wir jetzt:

$$\sigma_x = \frac{2G\nu}{1-2\nu} e + 2G\varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \lambda e + 2\mu\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{2G\nu}{1-2\nu} e + 2G\varepsilon_y \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu\varepsilon_y \qquad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{2G\nu}{1-2\nu} e + 2G\varepsilon_z \quad \rightarrow \quad \sigma_z = \lambda e + 2\mu\varepsilon_z \qquad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G}$$

λ …. 1. Lamé Konstante [N/m²]

μ …. 2. Lamé Konstante [N/m²]

Im Fall eines hydrostatischen Drucks gilt (p ist hier bei Druck definitionsgemäß eine positive Größe):

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p = 3\lambda e + 2\mu e = (3\lambda + 2\mu)e \quad \rightarrow \quad -p = Ke$$

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{3(1+\nu)} = \frac{3E\nu + (1-2\nu)E}{3(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \rightarrow \quad \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

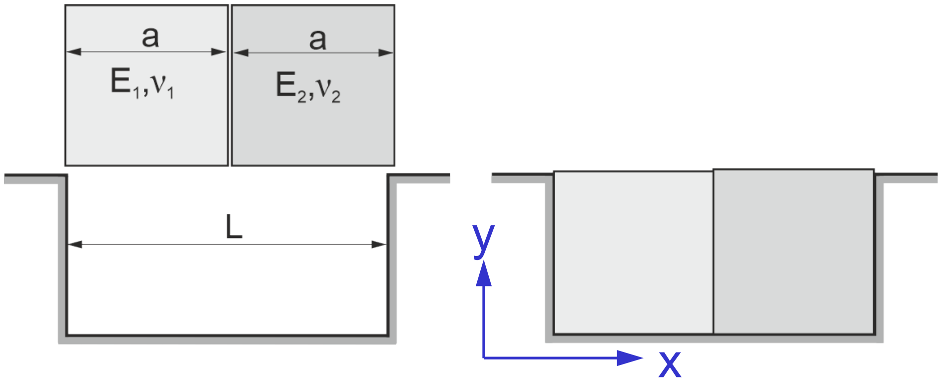
K …. Kompressionsmodul [N/m²]

$K \rightarrow \infty$ für $\nu = 0.5$

Beispiel: Einpressen zweier Würfel

Geg.: $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, a, L, 2a > L$

Ges.: Spannung zwischen den Würfeln



Hookesches Gesetz für die beiden Würfel:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_{x1} - \nu_1(\sigma_{y1} + \sigma_{z1})\right] + \alpha_{T1}\Delta T \qquad \varepsilon_{x2} = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{x2} - \nu_2(\sigma_{y2} + \sigma_{z2})\right] + \alpha_{T2}\Delta T$$

Betrachten wir nun die Randbedingungen des elastischen Problems:

- Keine Temperaturerhöhung ΔT=0
- Keine Spannungen in y- und z-Richtung (keine Dehnungsbehinderung) $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{z1} = \sigma_{z2} = 0$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen streichen sich einige Terme im Hooke'schen Gesetz

$$\varepsilon_{x1} = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_{x1} - \cancel{\nu_1(\sigma_{y1} + \sigma_{z1})}\right] + \cancel{\alpha_{T1}\Delta T} \qquad \varepsilon_{x2} = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{x2} - \cancel{\nu_2(\sigma_{y2} + \sigma_{z2})}\right] + \cancel{\alpha_{T2}\Delta T}$$

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_{x1}}{E_1} \qquad \varepsilon_{x2} = \frac{\sigma_{x2}}{E_2}$$

Auf die beiden Würfel wirkt zufolge des Einpressens gleich große Druckspannungen in x-Richtung.

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \sigma_x$$

Würfel 1 wird in x-Richtung um einen Betrag u_1 gestaucht, Würfel 2 um u_2. Diese Verschiebungen hängen unmittelbar mit den Dehnungen ε_{x1} und ε_{x2} zusammen:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{u_1}{a} \quad \rightarrow \quad u_1 = \frac{\sigma_x a}{E_1}$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{u_2}{a} \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{\sigma_x a}{E_2}$$

Da sich die beiden Würfel nicht frei ausdehnen können benötigen wir noch eine kinematische (geometrische) Verträglichkeitsbedingung:

$$a + u_1 + a + u_2 = L \quad \rightarrow \quad u_1 + u_2 = L - 2a$$

$$\frac{\sigma_x a}{E_1} + \frac{\sigma_x a}{E_2} = L - 2a$$

Druckspannung

$$\underline{\sigma_x = -\frac{E_1 E_2 (2a - L)}{(E_1 + E_2)a}}$$

10.3 Grundgleichungen der linearisierten Elastizitätsheorie

Ein Problem der linearen Elastizitätstheorie gehorcht also folgendem Satz von Gleichungen:

Dynamisches Grundgesetz:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + k_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + k_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + k_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Verzerrungs-Verschiebungs-zusammenhang (Kinematik):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Hookesches Gesetz:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha_T \Delta T \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

Das sind 15 Gleichungen für die folgenden 15 Unbekannten:

6 Spannungen: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

3 Verschiebungen: u, v, w

6 Verzerrungen: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

Durch Einsetzen kann man das Gleichungssystem auf 3 Gleichungen in u, v, w reduzieren:

$$G\left(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + k_x = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E}{1-2\nu}\frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x}$$

$$G\left(\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial y}\right) + k_y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{E}{1-2\nu}\frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial y}$$

$$G\left(\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}\right) + k_z = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E}{1-2\nu}\frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial z}$$

Navier Gleichungen

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ …. Laplace Operator

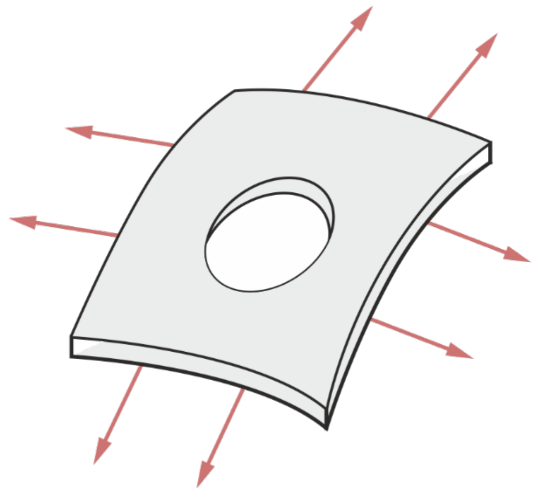
$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$ …. Volumsdehnung

Zur vollständigen Beschreibung des elastischen Problems ist noch die Vorgabe von Randbedingungen erforderlich. Außer für sehr einfache Randbedingungen können die Navier Gleichungen i.a. nicht mehr analytisch, sondern nur mehr numerisch gelöst werden.

10.4 Ebene Probleme

10.4.1 Ebener Spannungszustand ESZ – plane stress state

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad \varepsilon_z \text{ i.a.} \neq 0$$



Das Hookesche Gesetz wird dann

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

bzw. in inverser Formulierung:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \qquad (\lozenge)$$

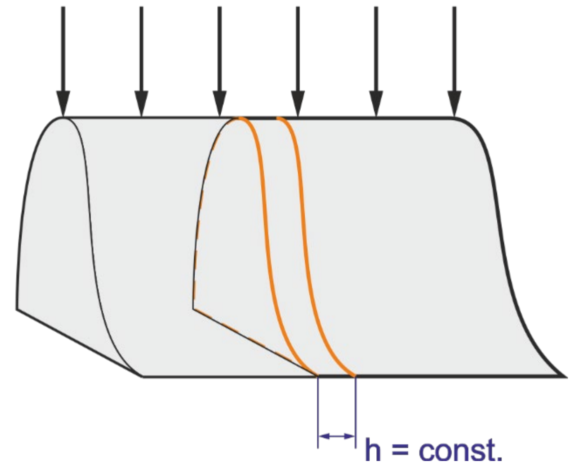
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Lastfreie Bauteiloberflächen befinden sich im ebenen Spannungszustand. Dementsprechend herrscht in dünnen Blechen (siehe Skizze) ein ebener Spannungszustand.

Anmerkung: Der Einfachheit halber beschränken wir uns in diesen Betrachtungen auf den isothermen Fall ΔT=0.

10.4.2 Ebener Verzerrungszustand EVZ – plane strain state

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad \text{i.a. } \sigma_z \neq 0$$



z.B. bei langen Bauteilen, die über die gesamte Länge gleich belastet sind.

Einsetzen in das allgemeine (3D) Hookesche Gesetz liefert für die Normalkomponenten:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \;\rightarrow\; \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Daraus kann σ_z heraus eliminiert werden. Somit ergibt sich das Hookesche Gesetz im EVZ:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(1-\nu^2) - \nu(1+\nu)\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y(1-\nu^2) - \nu(1+\nu)\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Die Umkehrung liefert:

$$\sigma_x = E\left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = E\left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_y + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x\right] \qquad (\Diamond\Diamond)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Ein Vergleich der ersten beiden Zeilen von (◊) mit (◊◊) ergibt:

ESZ

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

EVZ

$$\sigma_x = \boxed{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-\nu)}\varepsilon_y\right] = \boxed{\frac{E^*}{1-\nu^{*2}}}(\varepsilon_x + \nu^*\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_y + \boxed{\frac{\nu}{(1-\nu)}}\varepsilon_x\right] = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}}(\varepsilon_y + \boxed{\nu^*}\varepsilon_x)$$

Man kann also im EVZ einen Ersatz-E-Modul E^* und eine Ersatz-Querkontraktionszahl ν^* definieren, damit man formal mit den gleichen Formeln wie im ESZ rechnen kann.

Offensichtlich gilt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \nu^* &= \frac{\nu}{1-\nu} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad E^* = \frac{E}{1-\nu^2}}$$