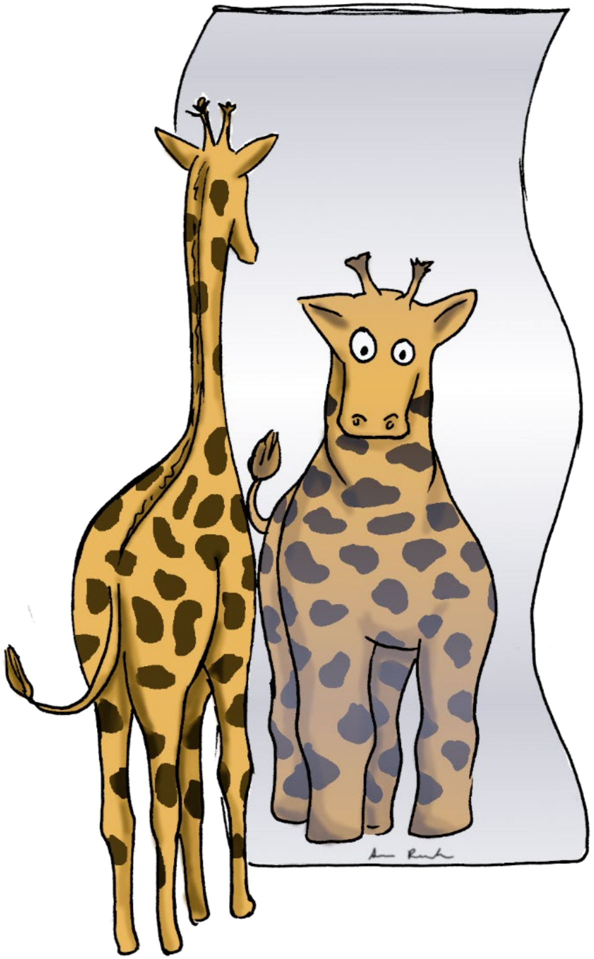
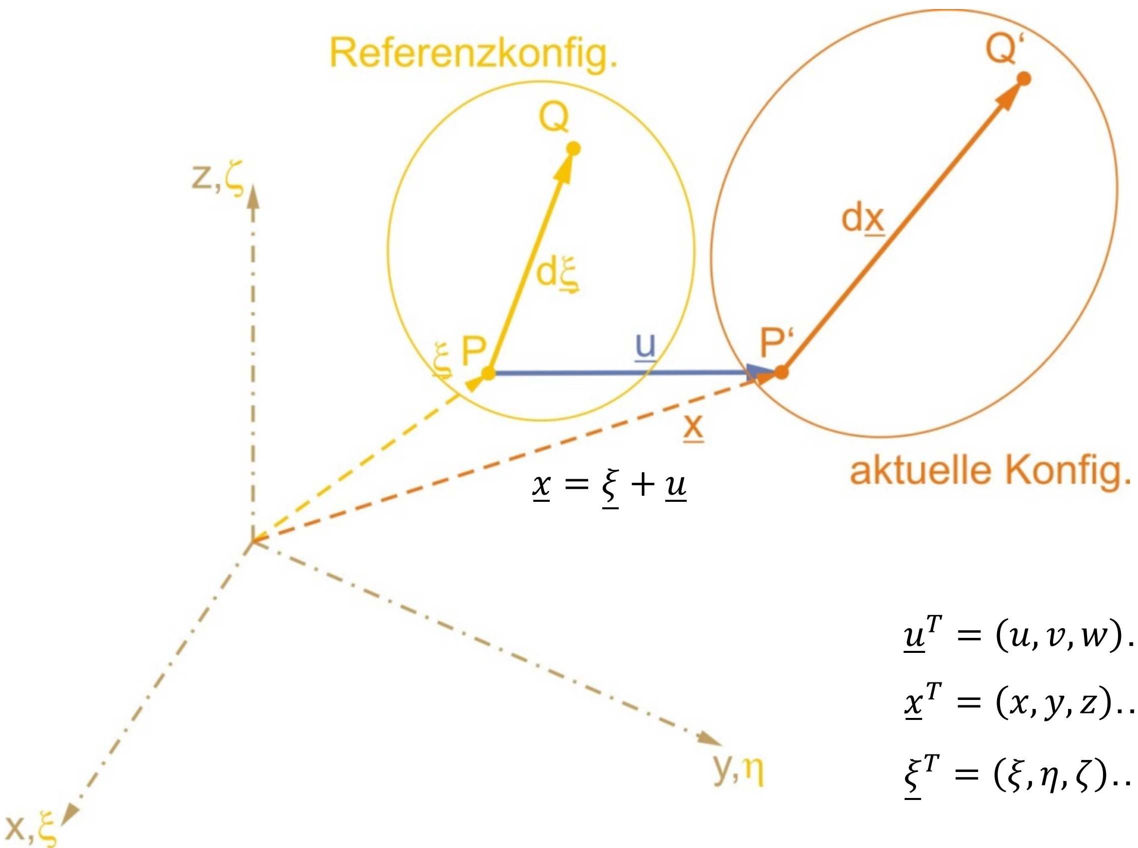
9. Der Verzerrungszustand



9.1 Verzerrungen und Verschiebungen



$$\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{u}$$

$\underline{u}^T = (u, v, w)$… Verschiebung

$\underline{x}^T = (x, y, z)$… Koordinaten, aktuelle Konfiguration

$\underline{\xi}^T = (\xi, \eta, \zeta)$… Koordinaten, Referenzkonfiguration

2 Betrachtungsweisen:

Lagrangesche:

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, t)$$
$$y = y(\xi, \eta, \zeta, t)$$
$$z = z(\xi, \eta, \zeta, t)$$

Eulersche:

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x}, t)$$

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$
$$\eta = \eta(x, y, z, t)$$
$$\zeta = \zeta(x, y, z, t)$$

z.B. in der Eulerschen Betrachtungsweise:

$$\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{u}$$
$$d\underline{\xi} = d\underline{x} - d\underline{u}$$
$$\underline{u}(x, y, z)$$

Mit der Kettenregel gilt:

$$d\xi = dx - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$d\eta = dy - \frac{\partial v}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial y}dy - \frac{\partial v}{\partial z}dz$$
$$d\zeta = dz - \frac{\partial w}{\partial x}dx - \frac{\partial w}{\partial y}dy - \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Die Metrik des Raums ist eindeutig definiert durch das Quadrat des Bogenelements:

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\ell^2 - \mathrm{d}\ell_0^2) = \frac{1}{2}(\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{dz}^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\zeta^2)$$

$$= E_{xx}^*\, dx^2 + E_{yy}^* dy^2 + E_{zz}^* dz^2 + 2\left(E_{xy}^* dxdy + E_{yz}^* dydz + E_{zx}^* dzdx\right)$$

mit

$$E_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \qquad 2E_{xy}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$E_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \qquad 2E_{yz}^* = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$E_{zz}^* = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \qquad 2E_{zx}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Man nennt sie die Verzerrungen des Körpers in der Eulerschen Betrachtungsweise

In der Lagrangeschen Betrachtungsweise schreibt man alle Differentiale als Funktion der Referenzkoordinaten ξ,η,ζ an und erhält:

$$dx = d\xi + \frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta}d\zeta$$
$$dy = d\eta + \frac{\partial v}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial v}{\partial \zeta}d\zeta$$
$$dz = d\zeta + \frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial w}{\partial \zeta}d\zeta$$

Die Metrik des Raums ist somit:

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\ell^2 - \mathrm{d}\ell_0^2) = E_{\xi\xi}d\xi^2 + E_{\eta\eta}d\eta^2 + E_{\zeta\zeta}d\zeta^2 + 2\left(E_{\xi\eta}d\xi d\eta + E_{\eta\zeta}d\eta d\zeta + E_{\zeta\xi}d\zeta d\xi\right)$$

mit

$$E_{\xi\xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right]$$
$$E_{\eta\eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right]$$
$$E_{\zeta\zeta} = \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]$$

$$2E_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)$$
$$2E_{\eta\zeta} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)$$
$$2E_{\zeta\xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \zeta}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)$$

Die so berechneten Verzerrungskomponenten lassen sich nun, je nach Betrachtungsweise, in einem symmetrischen Verzerrungstensor zusammenfassen:

Green-Lagrange Verzerrungstensor:

$$\underline{\underline{E}}^* = \begin{pmatrix} E^*_{xx} & E^*_{xy} & E^*_{xz} \\ E^*_{yx} & E^*_{yy} & E_{yz} \\ E^*_{zx} & E^*_{zy} & E^*_{zz} \end{pmatrix}$$

Euler-Almansi Verzerrungstensor:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{\xi\xi} & E_{\xi\eta} & E_{\xi\zeta} \\ E_{\eta\xi} & E_{\eta\eta} & E_{\eta\zeta} \\ E_{\zeta\xi} & E_{\zeta\eta} & E_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}$$

Für kleine Verformungen fällt die aktuelle Konfiguration annähernd mit der Referenzkonfiguration zusammen. Außerdem kann man Produkte und höhere Potenzen der Verschiebungsableitungen vernachlässigen. Somit gilt:

$$E^*_{xx} \approx E_{\xi\xi} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \qquad E^*_{xy} \approx E_{\xi\eta} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$E^*_{yy} \approx E_{\eta\eta} \approx \frac{\partial v}{\partial y} \qquad E^*_{yz} \approx E_{\eta\zeta} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$E^*_{zz} \approx E_{\zeta\zeta} \approx \frac{\partial w}{\partial z} \qquad E^*_{zx} \approx E_{\zeta\xi} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Wir betrachten ein spezielles Bogenelement parallel zur x-Achse in der aktuellen Konfiguration:

$$d\underline{\xi} = \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \qquad d\underline{x} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also:

$$d\xi = dx - \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$d\eta = -\frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$d\zeta = -\frac{\partial w}{\partial x} dx$$

Ein natürliches Maß für die Dehnung ist die relative Längenänderung:

$$\varepsilon = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0} = \frac{d\ell}{d\ell_0} - 1 = \frac{|d\underline{x}|}{|d\underline{\xi}|} - 1$$

Für das spezielle Bogenelement parallel zur x-Achse ist daher

$$\varepsilon_x = \frac{dx}{dx\sqrt{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2E_{xx}^*}} - 1$$

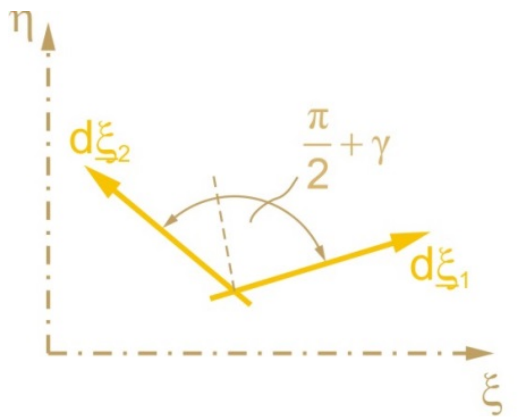
weil

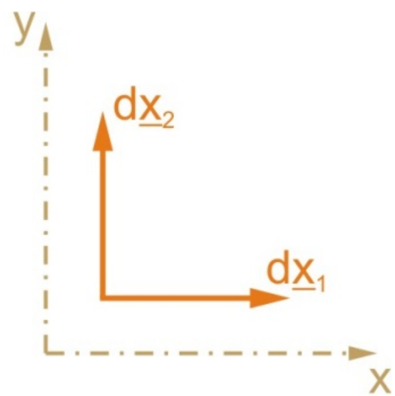
$$\sqrt{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1 - 2\left\{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}}$$

analog: $\varepsilon_y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2E_{yy}^*}} - 1$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2E_{zz}^*}} - 1$$

Schubverzerrungen:





$$d\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) = -\sin\gamma = \frac{d\underline{\xi}_1 \cdot d\underline{\xi}_2}{|d\underline{\xi}_1||d\underline{\xi}_2|}$$

Zähler:

$$d\underline{\xi}_1 \cdot d\underline{\xi}_2 = \begin{pmatrix} dx - \frac{\partial u}{\partial x}dx \\ -\frac{\partial v}{\partial x}dx \\ -\frac{\partial w}{\partial x}dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y}dy \\ dy - \frac{\partial v}{\partial y}dy \\ -\frac{\partial w}{\partial y}dy \end{pmatrix} = \left[-\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dxdy =$$

$$= dxdy \underbrace{\left[-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]}_{-2E^*_{xy}} \qquad (*)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) = -\sin\gamma = \frac{d\underline{\xi}_1 \cdot d\underline{\xi}_2}{|d\underline{\xi}_1||d\underline{\xi}_2|}$$

Nenner:

$$|d\underline{\xi}_1||d\underline{\xi}_2| = \sqrt{\underbrace{\left[1-2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]}_{1-2E^*_{xx}}\underbrace{\left[1-2\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]}_{1-2E^*_{yy}}}\,dxdy \quad (**)$$

also:

$$+\sin\gamma = \frac{(*)}{(\square\;)} = \frac{+2E^*_{xy}}{\sqrt{1-2E^*_{xx}}\sqrt{1-2E^*_{yy}}}$$

γ ist also der Scherwinkel in der xy-Ebene und wird daher in weiterer Folge mit $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ bezeichnet.

In weiterer Folge gehen wir von kleinen Verschiebungen und daher auch kleinen Verschiebungsgradienten aus. Somit sind auch E^*_{xx}, E^*_{yy}, E^*_{zz}, E^*_{xy}, E^*_{yz}, E^*_{zx} klein gegen 1, und wir dürfen die zuvor hergeleiteten Zusammenhänge linearisieren:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{1-2E^*_{xx}}} - 1 = \left(1-2E^*_{xx}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx 1 + E^*_{xx} - 1 = E^*_{xx}$$

$$\sin\gamma_{xy} \approx \gamma_{xy} = 2E^*_{xy}\left[\left(1-2E^*_{xx}\right)\left(1-2E^*_{yy}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2E^*_{xy}\Big[1-2\underbrace{\left(E^*_{yy}+E^*_{yy}-2E^*_{xx}E^*_{yy}\right)}_{\square}\Big]^{-\frac{1}{2}} \approx 2E^*_{xy}\left[1+\square\right] \approx 2E^*_{xy}$$

analog:

$$\varepsilon_y \approx E^*_{yy}$$

$$\varepsilon_z \approx E^*_{zz}$$

$$\gamma_{yz} \approx 2E^*_{yz}$$

$$\gamma_{zx} \approx 2E^*_{zx}$$

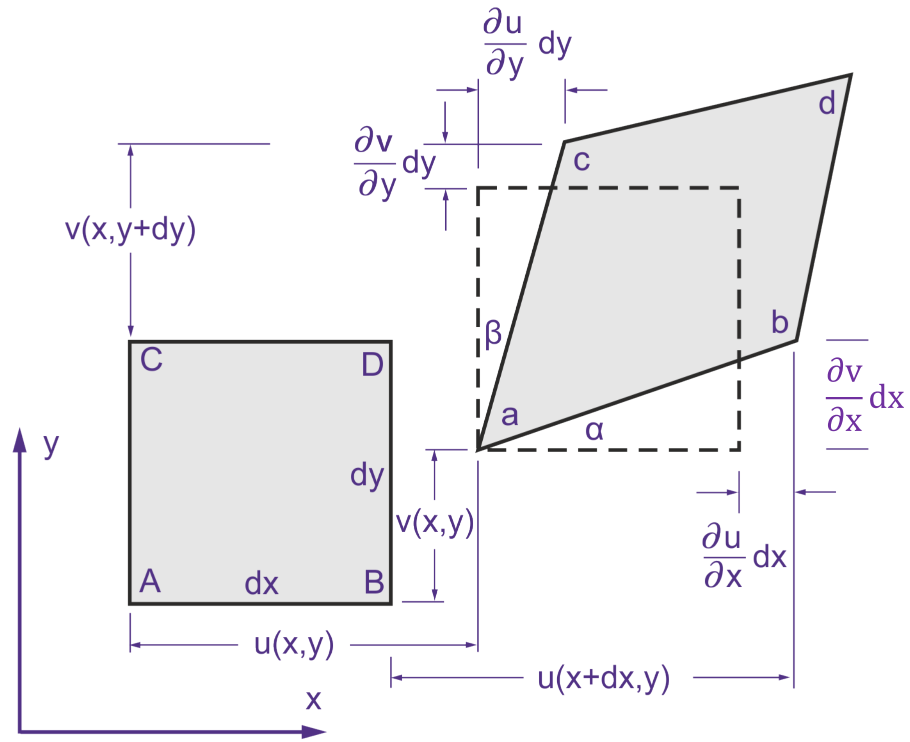
Wir betrachten die Verzerrung eines infinitesimalen rechteckigen Flächenelements. Für kleine Winkel α und β gilt folgende Näherung:

$$\overline{ab}\cos\alpha = \mathrm{dx} + \frac{\partial u}{\partial x}dx \approx \overline{ab} \qquad (1)$$

Die relative Längenänderung eines in x-Richtung orientierten infinitesimal kurzen Liniensegments $\overline{AB}$ ist

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{ab} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \qquad (2)$$

Berücksichtigt man, dass $\overline{AB} = \mathrm{dx}$, ergibt sich aus (2)



$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Normaldehnung in x-Richtung

und analog $\boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}$ $\boxed{\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}}$

Normaldehnung in y- bzw. z-Richtung

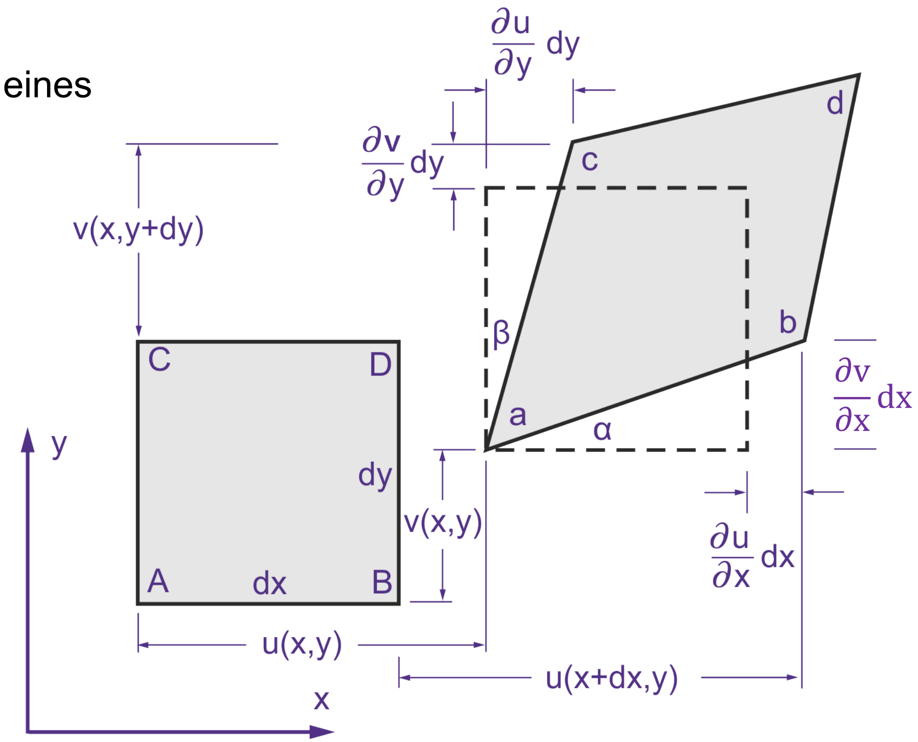
Die Scherverformung kann auch als „Änderung eines ursprünglich orthogonalen Winkels im Material“ definiert werden und ergibt sich somit als

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \qquad (1)$$

Aus den geometrischen Beziehungen erkennt man

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \qquad (2)$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} \qquad (3)$$



Für kleine Winkel gilt $\tan\alpha \approx \alpha$ und $\tan\beta \approx \beta$. Außerdem ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial v}{\partial y}$ klein gegen 1, somit lässt sich γ_{xy} mit (2) und (3) letztentlich anschreiben als

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} \approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Somit gilt:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

9.2 Verzerrungstensor

Verzerrungen lassen sich wie auch Spannungen in einem Tensor, dem Verzerrungstensor (=Dehnungstensor) anschreiben:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Der Verzerrungstensor lässt sich aus den linearisierten Verschiebungs – Verzerrungsbeziehungen ausrechnen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Da sich die 6 Verzerrungskomponenten aus nur 3 Verschiebungskomponenten berechnen lassen, sind sie nicht voneinander unabhängig, sondern müssen den Kompatibilitätsbedingungen genügen:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial y_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial y_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial y_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial y_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial y_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial y_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial y_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial y_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial y_{zx}}{\partial y}\right)$$

Beispiel: Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

Geg.: Verschiebungsfeld $\underline{u}^T(x, y, z) = (2xy, \quad y, \quad xyz)$
Ges.: Verzerrungstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$

Die Komponenten des Verzerrungstensors erhalten wir über die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = xz$$

$$\varepsilon_z = xy \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = yz$$

Somit können wir nun die Verzerrungskomponenten formal in einem Tensor zusammenfassen.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 2y & x & \frac{1}{2}yz \\ x & 1 & \frac{1}{2}xz \\ \frac{1}{2}yz & \frac{1}{2}xz & xy \end{pmatrix}$$

9.3 Transformation des ebenen Verzerrungstensors

In 2D nimmt der Verzerrungstensor folgende Form an:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

Die Transformationsvorschrift in ein um einen Winkel φ verdrehtes ξ, η Koordinatensystem erfolgt völlig analog zum ebenen Spannungszustand, d.h.:

$$\varepsilon_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e}_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\varepsilon_\eta = \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e}_\eta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e}_\eta = \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_\xi = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\varphi$$

Man erhält also die gleichen Transformationsformeln wie für den Spannungstensor. Es existiert daher eine analoge graphische Interpretation, der Mohrsche Dehnungskreis.

Demgemäß gelten auch analoge Formeln für die Lage der Dehnungshauptachsen bzw. für die Haupt(normal)dehnungen.
Ist beispielsweise ein ebener Verzerrungszustand durch ε_x, ε_y, γ_{xy} gegeben, so findet man den Hauptdehungszustand folgendermaßen:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{{\gamma_{xy}}^2}{4}}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

In umgekehrter Richtung gelten folgende Zusammenhänge (analog zum Spannungszustand):

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\varphi$$

$$\gamma_{xy} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi$$

Beispiel: DMS-Rosette

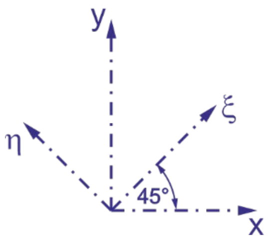
Geg.: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\xi$
Ges.: $\varepsilon_\eta, \gamma_{xy}$

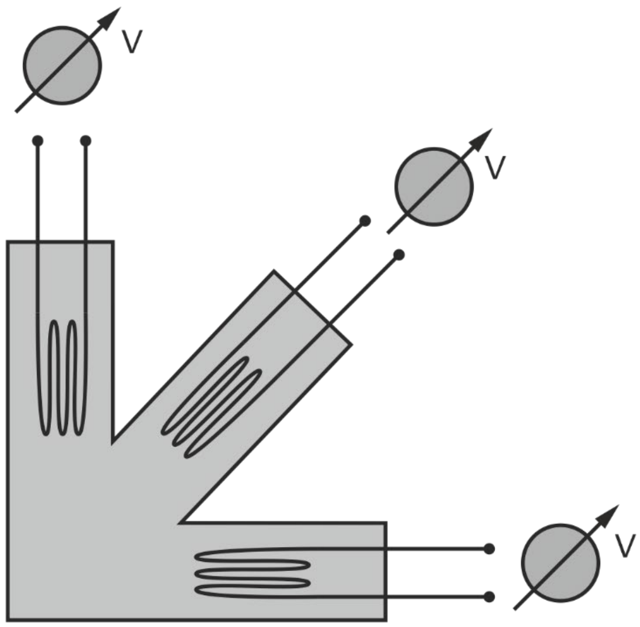
ε_η folgt sofort aus der ersten Invariante:

$$\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta = \varepsilon_x + \varepsilon_y \Rightarrow \underline{\varepsilon_\eta = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_\xi}$$

γ_{xy} aus den Transformationsformeln:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi$$





Mit $\varphi = 45°$ folgt daraus:

$$\underline{\gamma_{xy} = 2\varepsilon_\xi - \varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Über das Stoffgesetz kann man dann $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ berechnen.

Bemerkung: Die Transformationsformeln für die Hauptdehnungen (siehe vorige Folie - rot eingerahmt) können hier nicht direkt angewandt werden, da im allgemeinen weder die x-y noch die ξ-η Koordinatenachsen Dehnungshauptachsen sind.