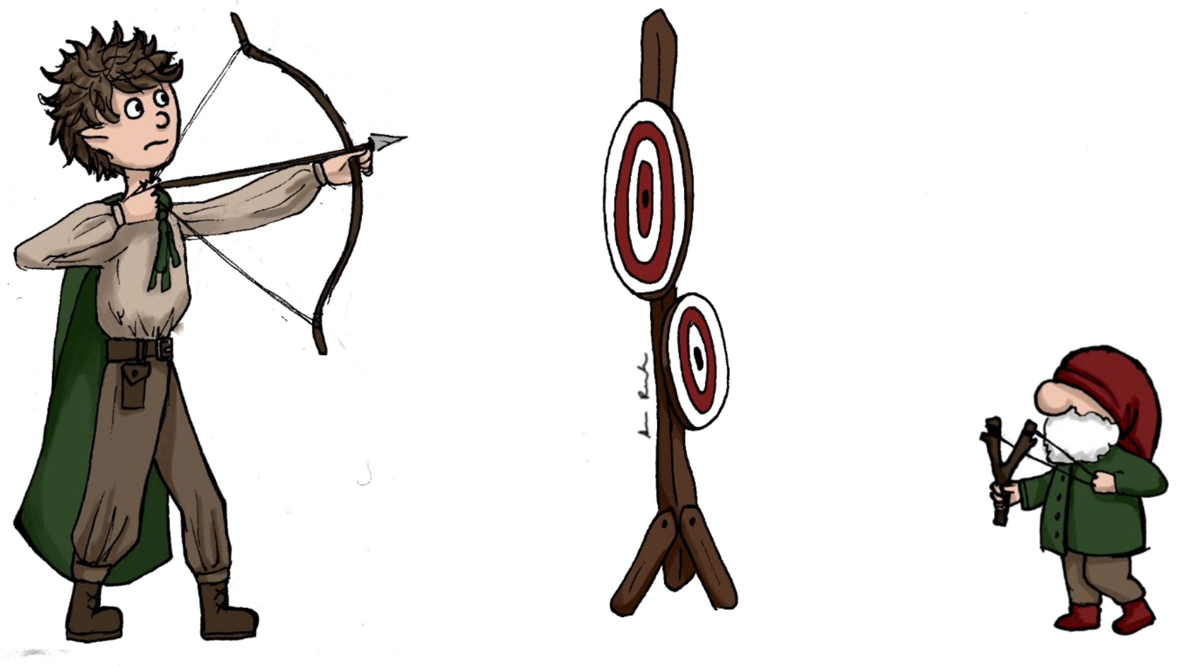
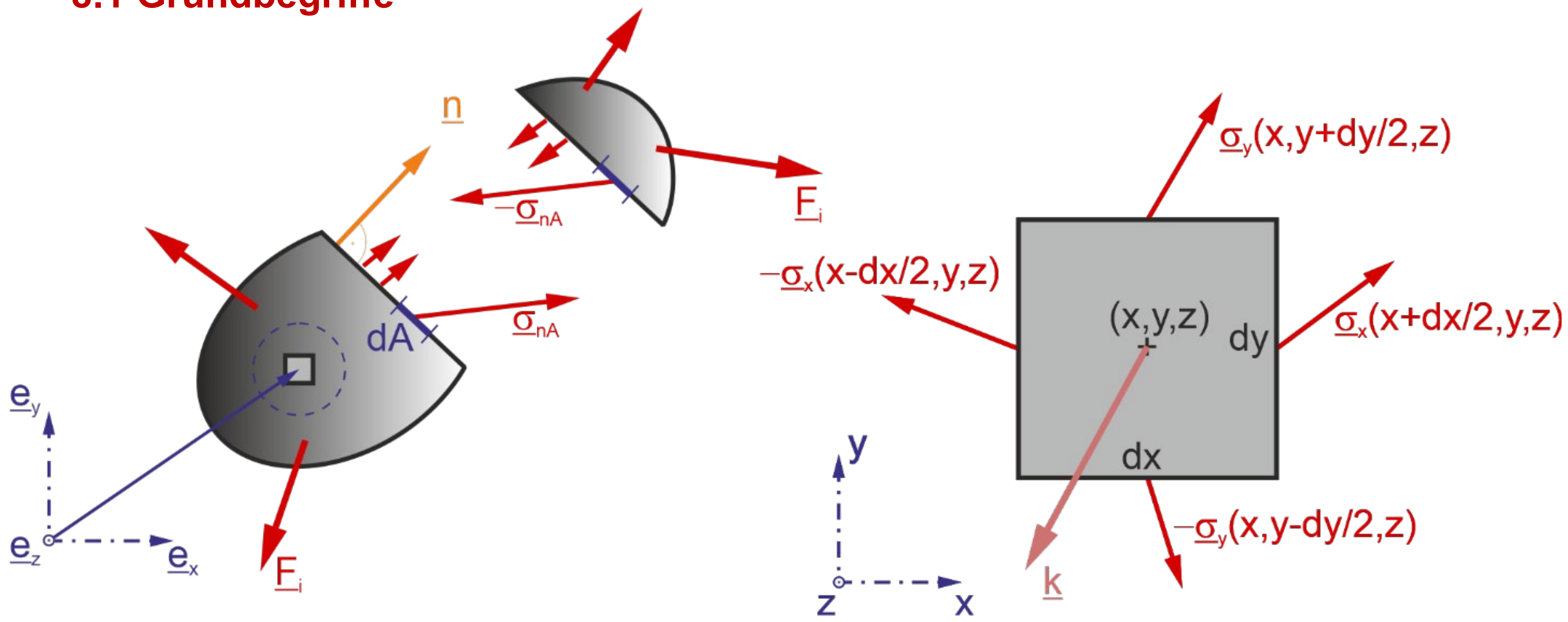
8. Der Spannungszustand



8.1 Grundbegriffe



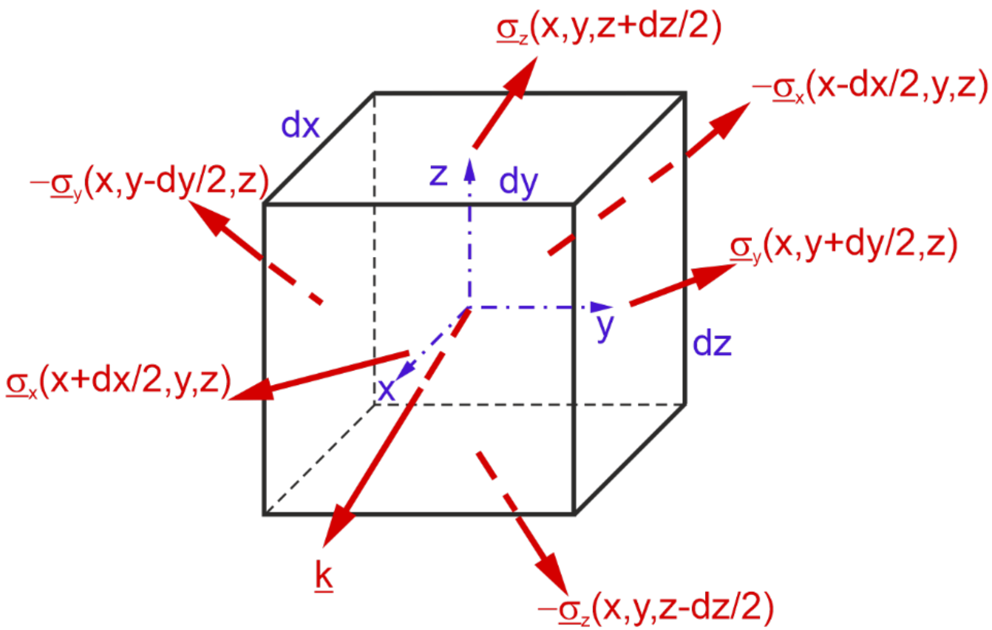
$\underline{\sigma}_{nA}$ …Spannungsvektor
(traction vector) [N/mm²]

$\underline{k}$ … Volumskraftdichte [N/mm³]

Definition Spannungsvektor:
Der Spannungsvektor ist die auf ein infinitesimales Flächenelement bezogene Schnittkraft.

$$\underline{\sigma} = \frac{d\underline{F}}{dA}$$

Kräftegleichgewicht am differentiellen Volumenelement:



$$\underline{\sigma}_x\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)=\underline{\sigma}_x(x,y,z)+\frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}\frac{dx}{2}+\text{Terme höherer Ordnung}$$

$$\underline{\sigma}_x\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\approx\underline{\sigma}_x(x,y,z)+\frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$-\underline{\sigma}_x\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)\approx-\underline{\sigma}_x(x,y,z)+\frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\quad \text{etc…}$$

$$d\underline{F}^{(R)}=\underline{k}\,dxdydz+\left(\frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}dx\right)dydz+\left(\frac{\partial\underline{\sigma}_y}{\partial y}dy\right)dzdx+\left(\frac{\partial\underline{\sigma}_z}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$d\underline{F}^{(R)} = \underline{k}\,dxdydz + \left(\frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x}dx\right)dydz + \left(\frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y}dy\right)dzdx + \left(\frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z}dz\right)dxdy \quad | : dV$$

$$\underline{f}^{(R)} = \frac{d\underline{F}^{(R)}}{dV} = \underline{k} + \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z}$$

Spannungsvektoren:

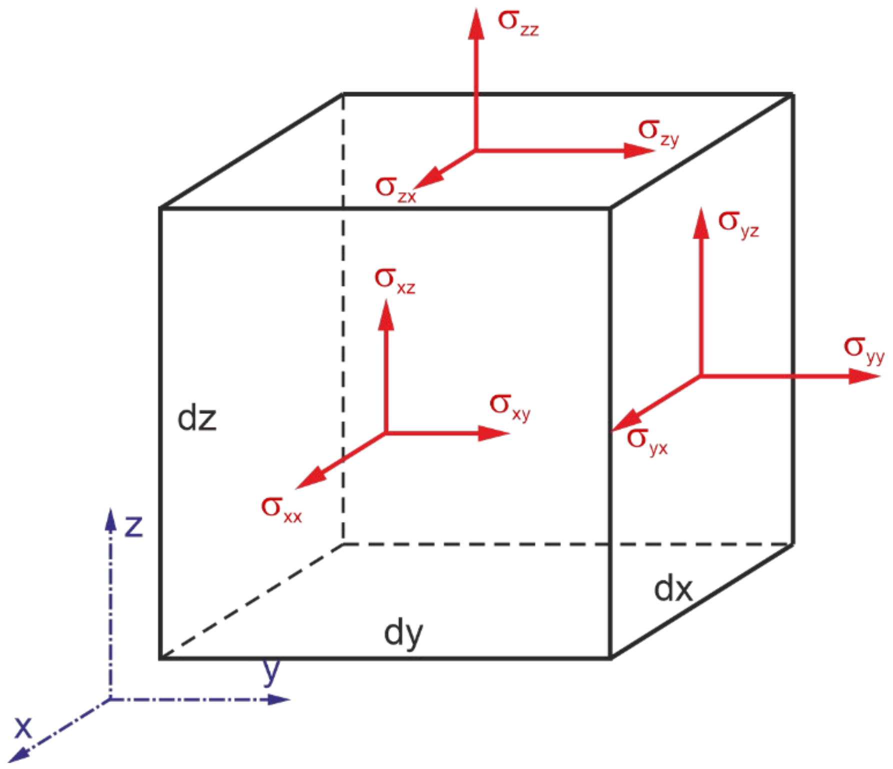
Erster Index: Normale auf die Bezugsfläche
Zweiter Index: Richtung der Spgs.-komponente

$$\underline{\sigma}_x = \begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}_y = \begin{pmatrix}\sigma_{yx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{yz}\end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}_z = \begin{pmatrix}\sigma_{zx}\\ \sigma_{zy}\\ \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

bzw. $\underline{\sigma}_x = \sigma_{xx}\underline{e}_x + \sigma_{xy}\underline{e}_y + \sigma_{xz}\underline{e}_z$

$\underline{\sigma}_y$, $\underline{\sigma}_z$ analog

Gleiche Indizes: Normalspannung
Unterschiedl. Indizes: Schubspannung



Einsetzen in das dynamische Grundgesetz:

$$d\underline{F}^{(R)} = dm\,\underline{a} \quad | \quad : dV$$

$$\underline{f}^{(R)} = \rho\underline{a}$$

$$\boxed{\underline{k} + \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z} = \rho\underline{a}}$$

In Komponenten angeschrieben:

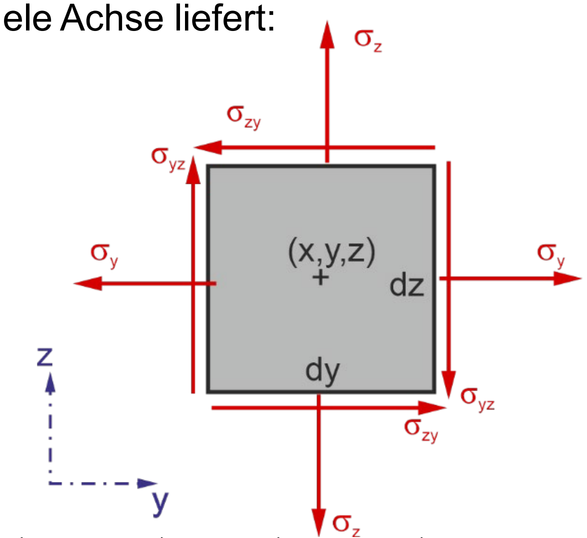
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + k_x = \rho a_x$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + k_y = \rho a_y$$
$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + k_z = \rho a_z$$

Alternative Schreibweise:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{k} = \rho\underline{a}$$

Spannungstensor

Momentengleichgewicht um eine zur x-Achse parallele Achse liefert:



$$(\sigma_{yz} dx dz) dy - (\sigma_{zy} dy dx) dz = 0 \quad | \quad : dV$$

und analog für y- bzw. z-parallele Achse liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \end{aligned}}$$

Dualität der Schubspannungen bzw. Satz der zugeordneten Schubspannungen

Spannungstensor

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Sehr häufig schreibt man auch

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Dualität der Schubspannungen ist der Spannungstensor symmetrisch!

Definitionen

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$ hydrostatische Spannung

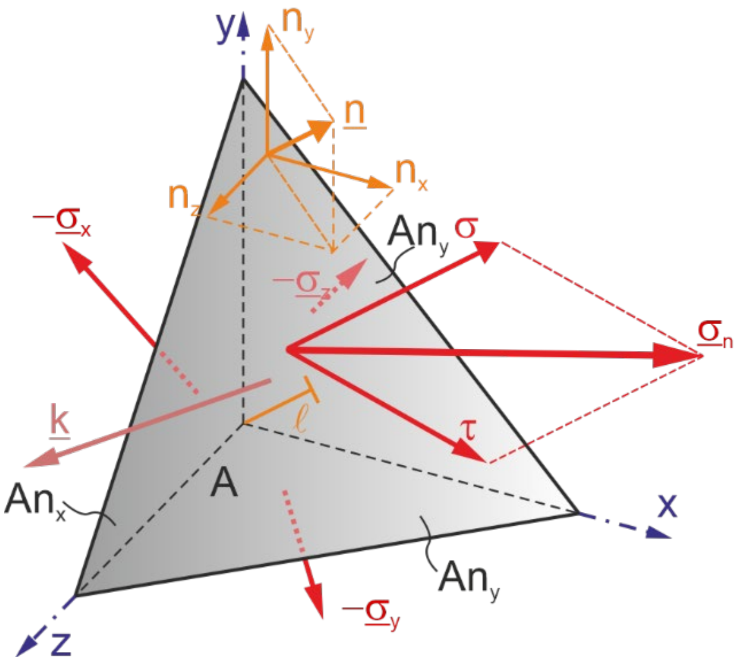
$$\underline{\underline{\sigma}} = p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}}_{\text{hydrostatischer Spannungsanteil}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{pmatrix}}_{\text{Deviator, deviatorischer Spannungsanteil}}$$

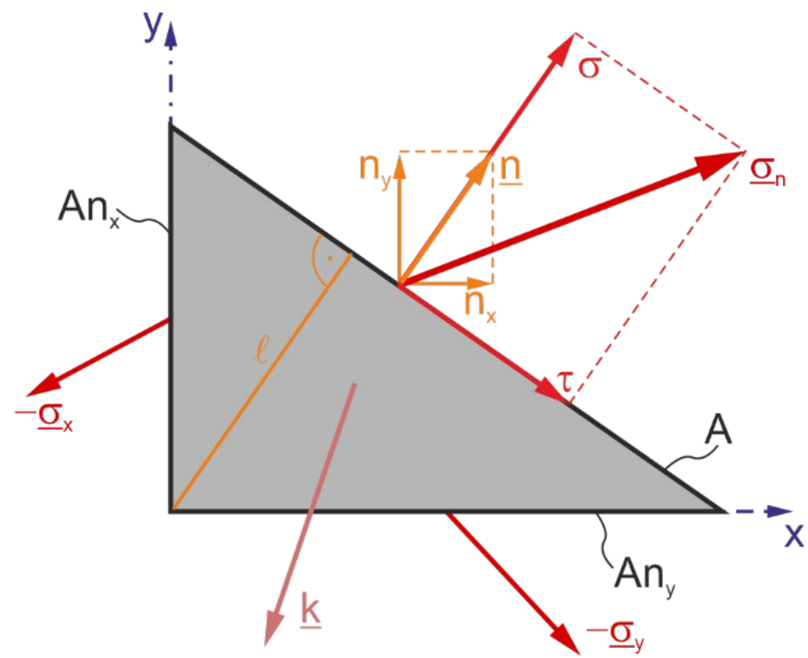
Diese Definitionen werden wir später noch brauchen.

8.2 Spannungsvektor

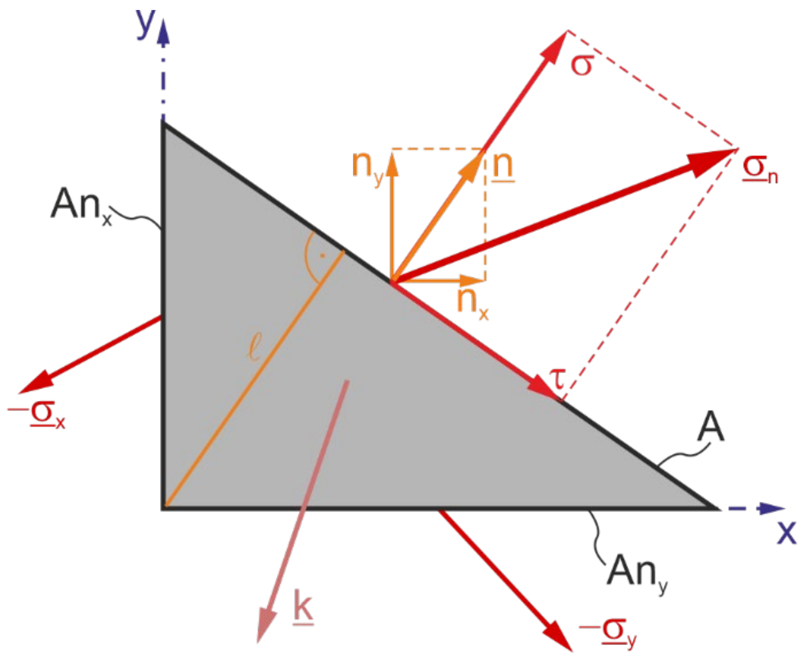
Schneiden wir aus einem Körper einen Tetraeder der Höhe ℓ heraus, so muss man an jeder Schnittfläche den jeweiligen Schnittspannungsvektor („traction vector“) einzeichnen, also $\underline{\sigma}_n$ bzw. $-\underline{\sigma}_x, -\underline{\sigma}_y, -\underline{\sigma}_z$.



Übersichtlicher lässt sich das in 2 Dimensionen darstellen. Man erkennt, wie der $\underline{\sigma}_n$-Vektor in eine Normalspannungskomponente σ und eine Schubspannungskomponente τ zerlegt wird:



Das Volumen des Tetraeders ist: $V = A\frac{\ell}{3}$



Einsetzen in das dynamische Grundgesetz liefert

$$\underline{k}V + \underline{\sigma}_n A - \underline{\sigma}_x A n_x - \underline{\sigma}_y A n_y - \underline{\sigma}_z A n_z = \rho \underline{a} V \quad | : A$$

$$\underline{k}\frac{\ell}{3} + \underline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_x n_x - \underline{\sigma}_y n_y - \underline{\sigma}_z n_z = \rho \underline{a}\frac{\ell}{3}$$

Nach dem Grenzübergang $\ell \to 0$ verbleibt:

$$\underline{\sigma}_n = \underline{\sigma}_x n_x + \underline{\sigma}_y n_y + \underline{\sigma}_z n_z$$

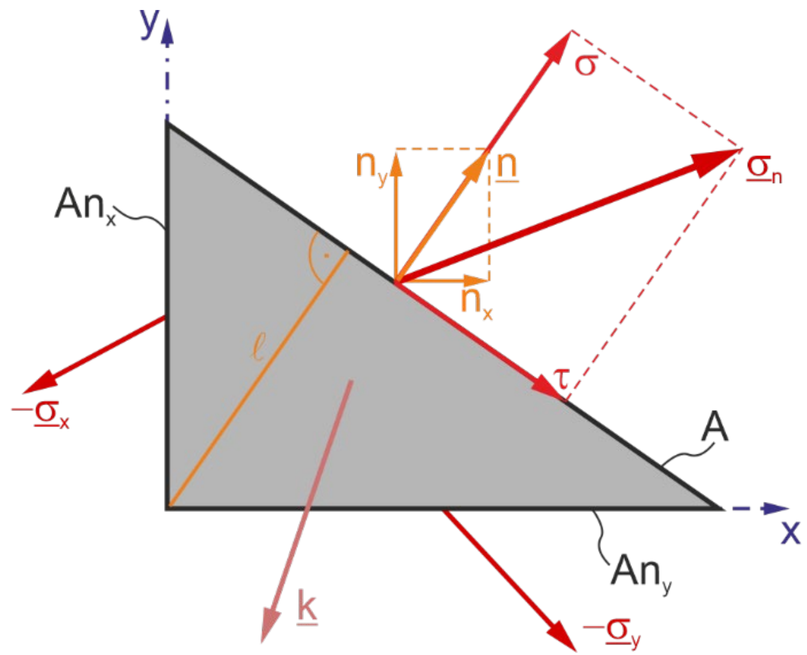
In Komponenten angeschrieben:

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensor lässt sich das auch so schreiben:

$$\underline{\sigma}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{pmatrix}$$, also: $\boxed{\underline{\sigma}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}}$

$\underline{\sigma}_n$ ist also jener Spannungsvektor, der auf die Schnittfläche mit der Normale $\underline{n}$ wirkt. $\underline{\sigma}_n$ ist im allgemeinen nicht normal zur Schnittfläche, sondern hat sowohl eine Komponente σ (Normalspannungskomponente) in Richtung von $\underline{n}$ als auch eine Komponente τ (Schubspannungskomponente) in der Schnittebene.



Die Normalspannung ergibt sich aus der Projektion von $\underline{\sigma}_n$ auf $\underline{n}$ mit Hilfe des inneren Produkts

$$\sigma = \underline{\sigma}_n \cdot \underline{n}$$

In der Notation der Matrixrechnung schreibt man alternativ auch

$$\sigma = \underline{\sigma}_n^T \, \underline{n}$$

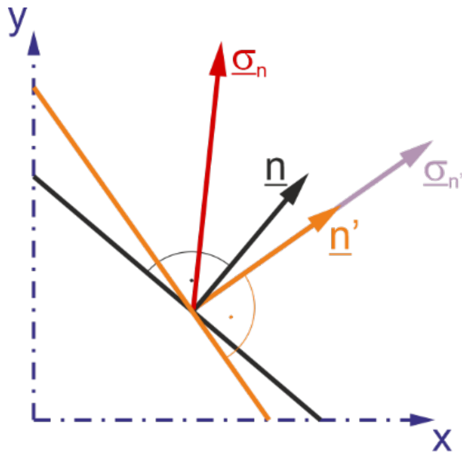
$$\boxed{\sigma = \underline{\sigma}_n^T \, \underline{n}}$$

Die Schubspannung lässt sich dann mittels des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$\tau^2 = |\underline{\sigma}_n|^2 - \sigma^2 \qquad |\underline{\sigma}_n|^2 \equiv \sigma_n{}^2$$

$$\boxed{\tau^2 = |\underline{\sigma}_n|^2 - \sigma^2}$$

8.3. Hauptnormalspannungen



Wählt man eine andere Schnittebene $\underline{n}'$, so wirkt darauf ein anderer Spannungsvektor. In diesem Zusammenhang kann man zwei Fragen formulieren:

1. Frage: Wann fallen die Richtungen von $\underline{\sigma}_n$ und $\underline{n}$ zusammen, d.h. wann verschwindet τ?

$$\underline{\sigma}_{n'} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}' = \lambda\,\underline{n}'}_{\text{Eigenwert Problem}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}' - \lambda\,\underline{n}' = \underline{0} \;\rightarrow\; \left(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{I}}}\right)\,\underline{n}' = \underline{0}$$

Das Eigenwertproblem hat nur dann nicht–triviale Lösungen für $\underline{n}'$, wenn

$$\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda\,\underline{\underline{\mathbf{I}}}\right) = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$\det\begin{pmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Das führt auf das folgende für den Spannungszustand charakteristische Polynom:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0$$

Wir ersetzen das Symbol λ durch σ und erhalten somit: $\boxed{-\sigma^3 + I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0}$

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms I_1, I_2, I_3 nennt man die Invarianten des Spannungstensors. Bei einer Darstellung des Spannungstensors in einem anderen Koordinatensystem (z.B. verdreht gegenüber dem Original KS) ändern sich das charakteristische Polynom und somit die Invarianten nicht (im Unterschied zu den Einträgen in der Matrixdarstellung des Spannungstensors).

Die Invarianten lassen sich auch explizit anschreiben als:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = Spur(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 = -(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2\sigma_{zz} - \tau_{zy}^2\sigma_{xx} - \tau_{xz}^2\sigma_{yy} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = det(\underline{\underline{\sigma}})$$

Die Invarianten benötigen wir später für die Definition der Vergleichsspannung. I_1 ist unmittelbar mit der hydrostatischen Spannung p verknüpft:

$$p = \frac{1}{3} I_1$$

Die Lösung der kubischen Gleichung $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0$ führt auf 3 reelle Lösungen: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die Hauptnormalspannungen.

Diese werden üblicherweise so angeordnet, dass $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{n}_1$, $\underline{n}_2$, $\underline{n}_3$ erhält man durch Einsetzen von σ_1, σ_2 bzw. σ_3 in das ursprüngliche Gleichungssystem.

z.B.: $\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{I}}\right) \underline{n}_1 = \underline{0}$

d.h. ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{xx} - \sigma_1) n_{1_x} + \sigma_{xy} n_{1_y} + \sigma_{xz} n_{1_z} &= 0, \\
\sigma_{xy} n_{1_x} + \left(\sigma_{yy} - \sigma_1\right) n_{1_y} + \sigma_{yz} n_{1_z} &= 0, \\
\sigma_{xz} n_{1_x} + \sigma_{yz} n_{1_y} + (\sigma_{zz} - \sigma_1) n_{1_z} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dieses homogene Gleichungssystem erhält erst durch die Nebenbedingung $n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1$ (d.h. $\left|\underline{n_1}\right| = 1$) eine nicht-triviale Lösung für $\underline{n}_1$.
In gleicher Weise verfährt man zur Bestimmung von $\underline{n}_2$ und $\underline{n}_3$ und erhält die den Hauptnormalspannungen zugeordneten Hauptspannungsrichtungen.

Da $\underline{\underline{\sigma}}$ ein symmetrischer Tensor ist, gilt für seine Eigenvektoren: $\boxed{\underline{n}_1 \perp \underline{n}_2 \perp \underline{n}_3}$

Somit spannen $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ ein Koordinatensystem auf, die Spannungshauptachsen. Das ist gleichzeitig jenes Koordinatensystem, in dem $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Extremwerte annehmen:

σ_1 ... Maximum, größte Hauptnormalspannung
σ_2 ... Sattelpunkt
σ_3 ... Minimum, kleinste Hauptnormalspannung

Man hätte von vorneherein die Suche nach den Hauptnormalspannungen als Extremwertaufgabe formulieren können. Das führt uns auf die 2. Frage:

2. Frage: Für welche Richtung $\underline{n}$ wird die Normalspannung σ extremal?

bzw.: gesucht wird n_x, n_y, n_z so, dass $\sigma = \underline{\sigma}_n^T \underline{n} = \left(\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\right)^T \underline{n} \rightarrow$ Extremum, mit der NB $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$F\left(n_x, n_y, n_z\right) = \sigma\left(n_x, n_y, n_z\right) - \lambda\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1\right)$$

Lagrange Multiplikator

ausgeschrieben:

$$\mathrm{F} = \sigma_{xx} n_x^2 + \sigma_{yy} n_y^2 + \sigma_{zz} n_z^2 + 2\left(n_x n_y \tau_{xy} + n_y n_z \tau_{yz} + n_z n_x \tau_{zx}\right) - \lambda\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_x} = 0 : 2\left(\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z - \lambda n_x\right) = 0$$

Das Extremum findet man durch Nullsetzen der Ableitungen von F nach den Unbekannten n_x, n_y und n_z:

$$\frac{\partial F}{\partial n_x} = 0: \quad 2\left(\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z - \lambda n_x\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_y} = 0: \quad 2\left(\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z - \lambda n_y\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_z} = 0: \quad 2\left(\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z - \lambda n_z\right) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also wieder exakt das gleiche Eigenwertproblem und somit die gleichen Lösungen wie für die 1. Frage.

Zur Erinnerung:

- Im Spannungshauptachsensystem verschwinden die Schubspannungen, d.h. der Spannungstensor erhält folgende Darstellung:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

- Hauptnormalspannungen sind extremal, d.h. $\underbrace{\sigma_1}_{\text{Maximum}} \geq \sigma_2 \geq \underbrace{\sigma_3}_{\text{Minimum}}$

In gleicher Weise kann man sich die Frage stellen, welchen Richtungen $\underline{n}$ die Extremalwerte von τ zugeordnet sind:

$$\tau^2 = \sigma_n^2 - \sigma^2 = \sigma_n^2 - (\underline{\sigma}_n^T \underline{n})^2$$

Die prinzipiell gleiche Vorgehensweise wie zuvor ergibt:

$$\boxed{\tau_1 = \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|, \quad \tau_2 = \left|\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right|, \quad \tau_3 = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|}$$

Man nennt sie Hauptschubspannungen, die ihnen zugeordneten Richtungen sind i.a. nicht normalspannungsfrei.
In der Festigkeitslehre haben sie aber eine geringere Bedeutung als die Hauptnormalspannungen.

8.3.1 Hauptnormalspannungen für den ebenen Spannungszustand

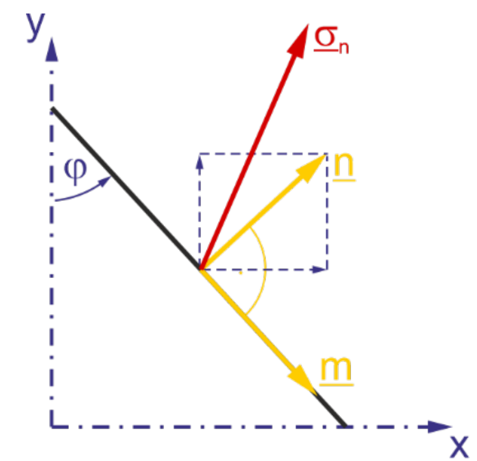
Der ebene Spannungszustand ist definiert durch: $\sigma_{zz}(\equiv \sigma_z) = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, d.h. alle Komponenten aus der xy-Ebene heraus verschwinden.

$$\underline{\sigma_n} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \underline{\sigma_n}^T \underline{n} = (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} =$$
$$= \sigma_x n_x^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + \sigma_y n_y^2$$

Mit $\underline{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\varphi + 2\tau_{xy} \cos\varphi \sin\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi$$



Das lässt sich mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

umschreiben zu

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

Allg: Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Analog gilt für τ:

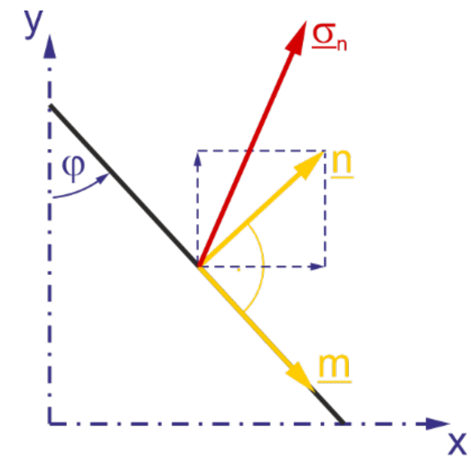
$$\tau = \underline{\sigma}_n^T \underline{m} = \sigma_x n_x m_x + \tau_{xy} n_y m_x + \tau_{yx} n_x m_y + \sigma_y n_y m_y$$

Mit $\underline{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\underline{m} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\tau = \sigma_x \cos\varphi \sin\varphi - \sigma_y \sin\varphi \cos\varphi + \tau_{xy}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$$

bzw. nach Anwendung der Additionstheoreme

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



Zusammenfassend lässt sich mit folgenden Formeln ein im xy-Koord.-system dargestellter ebener Spannungszustand in ein beliebiges, dazu um einen Winkel φ verdrehtes ξη-KS transformieren:

$$\sigma_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_\eta = \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_\eta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_\eta = \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_\xi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Wir suchen nun speziell nach den Hauptnormalspannungen:

Geg.: ebener Spannungszustand mit $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$
Ges.: Hauptnormalspannungen σ_1, σ_2 und zugehörige Richtung φ

Wie im 3D Fall erfordert das Eigenwertproblem das Verschwinden der Determinante

$$\det\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Um die Richtung φ zu finden, denken wir daran, dass $\tau = 0$ sein muss.

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi - \tau_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

$$\rightarrow \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Lösung:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

8.4 Mohrscher Spannungskreis

Betrachten wir nun die umgekehrte Fragestellung:

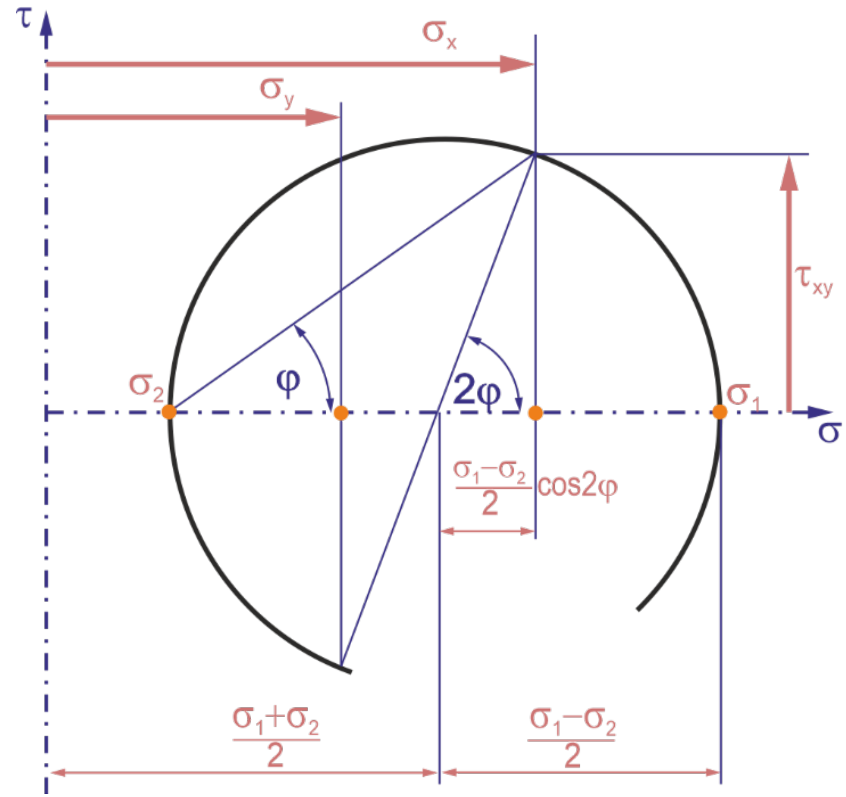
Geg.: ebener Spannungszustand mit den HNS σ_1, σ_2 und eine Richtung φ
Ges.: Spannungstensor $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ in einem um φ verdrehten Koordinatensystem.

Einsetzen in die Transformationsformeln für den Spannungstensor liefert

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi$$

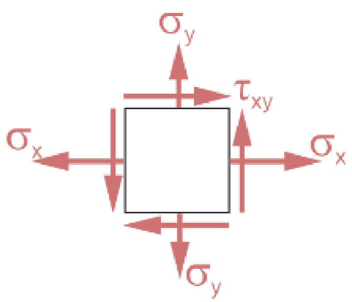
Die Transformationsformeln lassen sich geometrisch mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises interpretieren.

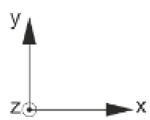


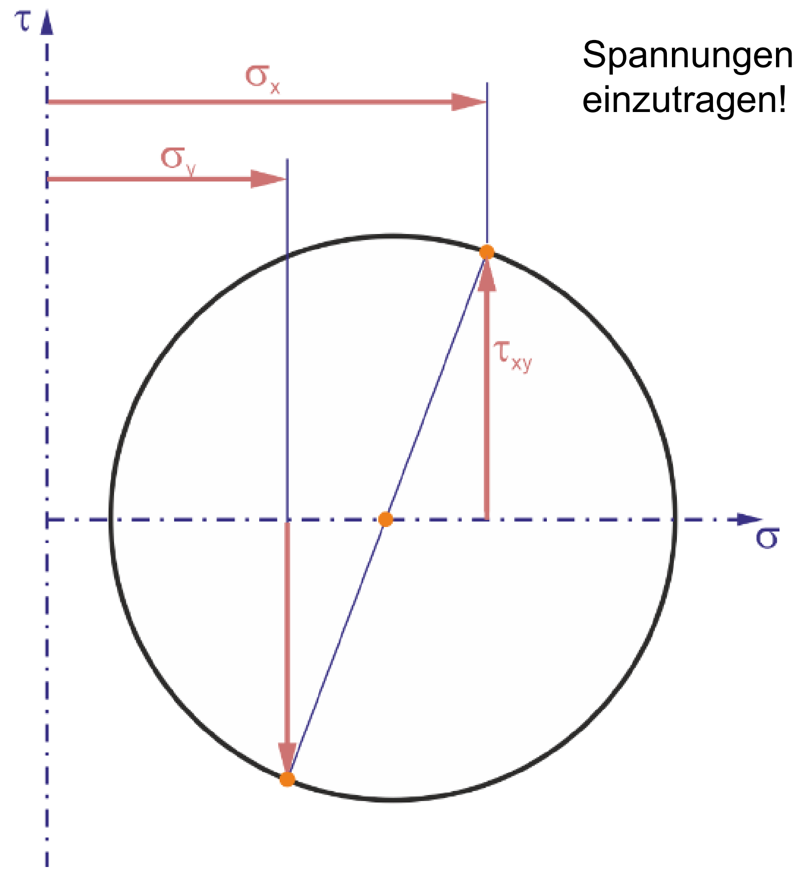
8.4.1 Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

Geg.: ebener Spannungszustand $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ wobei $\sigma_x > \sigma_y$ und $\tau_{xy} > 0$

Ges.: Mohrscher Spannungskreis





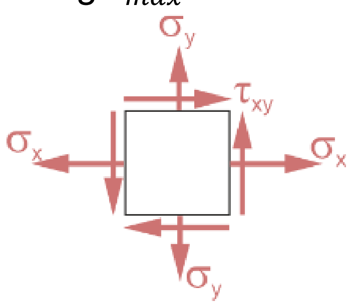


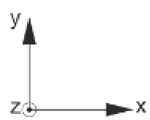
Spannungen sind vorzeichenrichtig einzutragen!

Gewähltes Koodinatensystem
$\Rightarrow$ Positive Drehung entgegen des Uhrzeigersinns

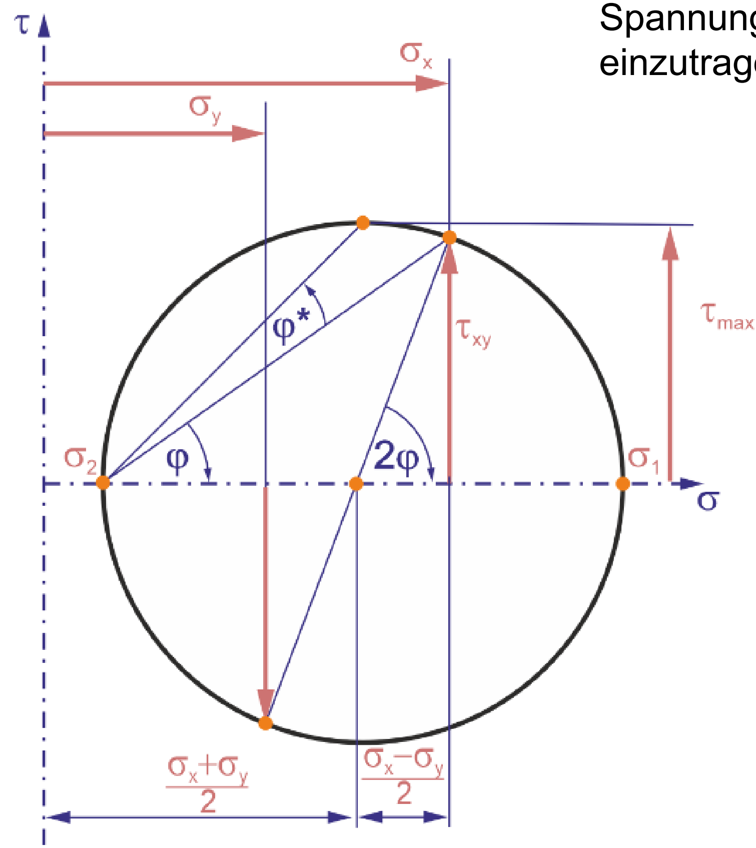
8.4.2 Ermittlung der Hauptnormal- und Hauptschubspannung

Geg.: ebener Spannungszustand $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ wobei $\sigma_x > \sigma_y$ und $\tau_{xy} > 0$
Ges.: Hauptnormalspannungen σ_1, σ_2, sowie der zugehörige Drehwinkel φ sowie die Hauptschub-spannung τ_{max} und der zugehörige Drehwinkel φ'

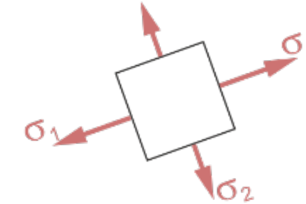


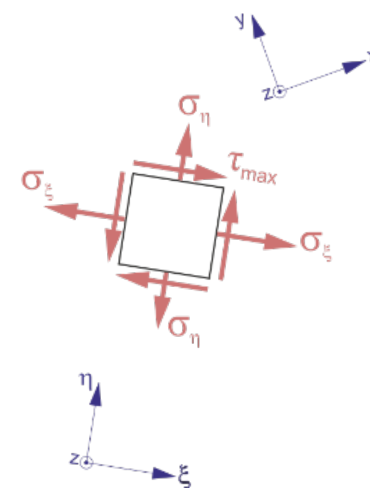


Gewähltes Koodinatensystem
$\Rightarrow$ Positive Drehung entgegen des Uhrzeigersinns



Spannungen sind vorzeichenrichtig einzutragen!

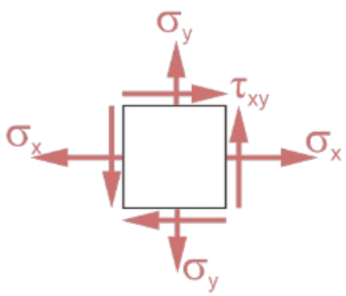


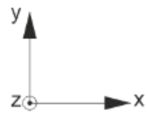


8.4.3 Ermittlung von Normal- und Schubspannung in allgemeiner Schnittrichtung

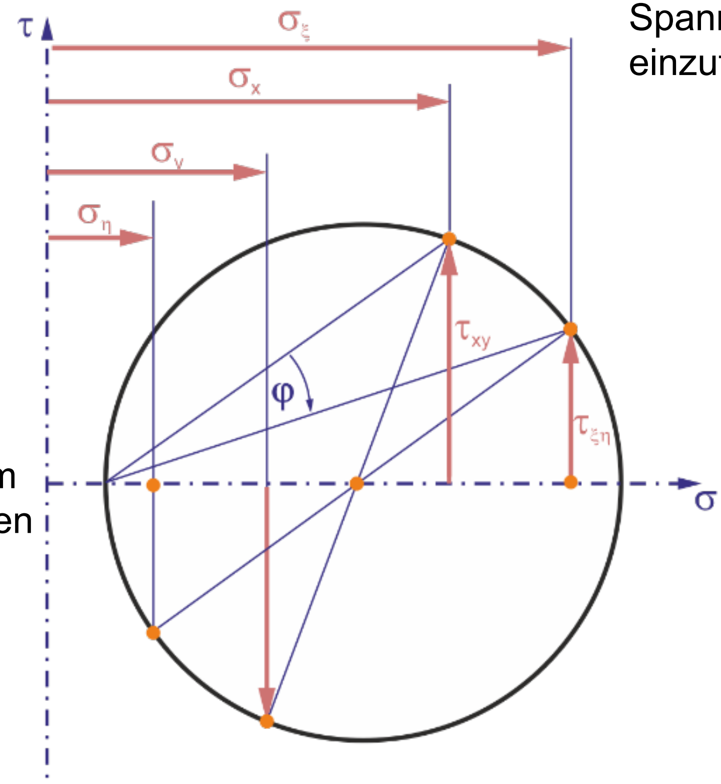
Geg.: ebener Spannungszustand $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ wobei $\sigma_x > \sigma_y$ sowie der Drehwinkel $+\varphi$

Ges.: Spannungen $\sigma_\eta, \sigma_\zeta$, sowie $\tau_{\eta\zeta}$





Gewähltes Koodinatensystem
$\Rightarrow$ Positive Drehung entgegen des Uhrzeigersinns



Spannungen sind vorzeichenrichtig einzutragen!

8.4.4 Spezialfälle

Einachsiger Spannungszustand — Hydrostatischer Spannungszustand — Schubbeanspruchung