

## 7. Flächenmomente



### 7.1 Definition Flächenmoment

Das Flächenmoment n-ten Grades ist definiert als:

$$\int z^n dA$$

In der Mechanik werden nur Flächenmomente 0., 1. und 2. Grades benötigt.

Das Flächenmoment 0. Grades ist die Fläche selbst.

$$A = \int dA$$

Das Flächenmoment 1. Grades wird auch als **statisches Moment** bezeichnet. Es ist bereits aus dem Kapitel Schwerpunkt bekannt.

$$S_y = \int z dA$$

$$S_z = \int y dA$$

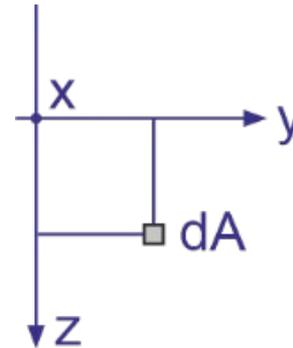
## 7.2 Flächenmomente 2. Grades

Definition:

$$J_y = \int z^2 dA = A i_y^2$$

$$J_z = \int y^2 dA = A i_z^2$$

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dA = A i_x^2$$



Entscheidend für das FTRM ist jeweils der Normalabstand des Flächenelements  $dA$  zur Bezugsachse.

$J_x, J_y, J_z \dots$  Flächenträgheitsmomente  $[m^4]$

$i_x, i_y, i_z \dots$  Trägheitsradien  $[m]$

$J_x$  wird auch polares Flächenträgheitsmoment  $J_p$  genannt.

Offensichtlich gilt:

$$J_p = J_y + J_z$$

$$i_x^2 = i_y^2 + i_z^2$$

Definition:

$$J_{yz} = \int yz \, dA = \int zy \, dA = J_{zy}$$

$$\left. \begin{aligned} J_{zx} &= \int zx \, dA = \int xz \, dA = J_{xz} = 0 \\ J_{xy} &= \int xy \, dA = \int yx \, dA = J_{yx} = 0 \end{aligned} \right\} \text{weil } x \equiv 0!$$

$J_{yz}$  ... **Flächendeviationsmoment** [m<sup>4</sup>]

Offensichtlich sind Trägheitsmomente stets positiv, während das Deviationsmoment auch negativ sein kann.

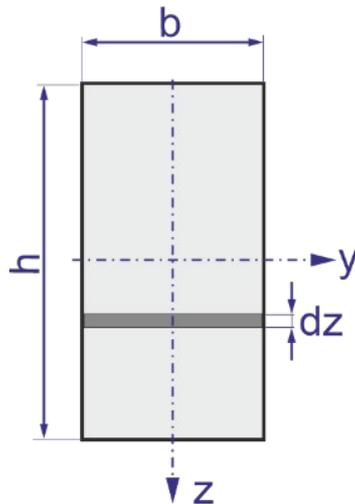
Trägheits- und Deviationsmomente spielen bei der Beurteilung der Festigkeit sowie der Steifigkeit von Strukturen eine zentrale Rolle, siehe die noch folgenden Kapitel zum geraden Stab.

Man kann die Flächenmomente formal in einem symmetrischen Tensor zusammenfassen, dem **Trägheitstensor**:

$$J = \begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}$$

Für ihn gelten formal alle für Tensoren üblichen Transformationsregeln.

## Beispiel: Rechteckquerschnitt



$$J_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b \left( \frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 h dy = h \left( \frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right) = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_x = J_y + J_z = \frac{bh(h^2 + b^2)}{12}$$

$$J_{yz} = \int_A yz dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} yz dy dz = \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) y dy = 0$$

Generell gilt: Ist eine der beiden Bezugsachsen eine Symmetrieachse, so verschwindet das Deviationsmoment!

Die obigen Ausdrücke sind in der Festigkeitslehre so wichtig, dass man sie sich auswendig merken sollte:

$$J_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \frac{hb^3}{12}$$

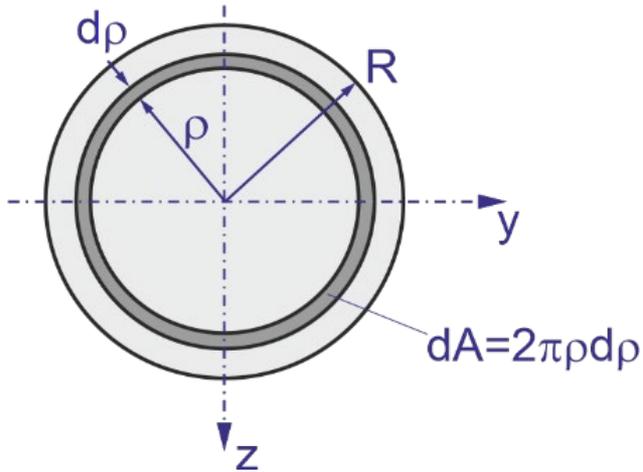
$$J_{yz} = 0$$

$$i_y = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$i_z = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$i_x = \frac{\sqrt{h^2 + b^2}}{2\sqrt{3}}$$

Beispiel: Kreisquerschnitt



$$J_x = \int p^2 dA = \int_0^r p^2 \pi 2p dp = \frac{r^4 \pi}{2}$$

aus  $J_y = J_z = \frac{1}{2} J_x$  folgt:

$$J_y = J_z = \frac{r^4 \pi}{4}$$

Das Deviationsmoment  $J_{yz} = 0$ , da ja  $y, z$  sowie alle anderen Durchmesserachsen Symmetrieachsen sind.

Diese Formeln haben eine zentrale Bedeutung in der Praxis, daher sollte man sie auswendig wissen:

$$J_y = J_z = \frac{r^4 \pi}{4}$$

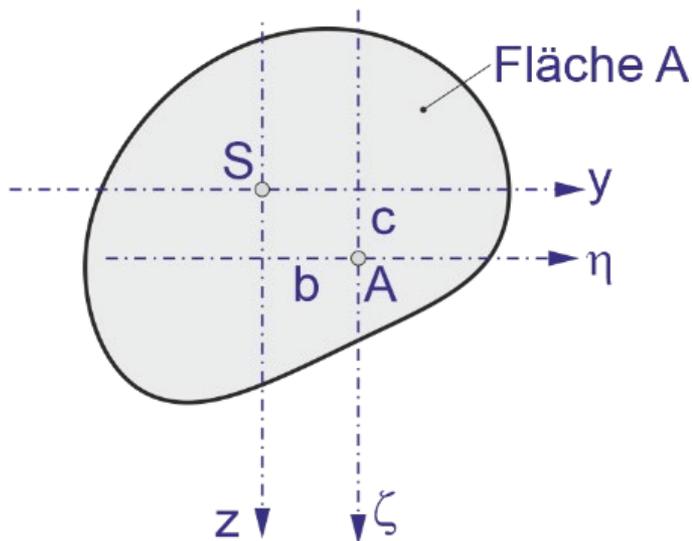
$$J_x = J_p = \frac{r^4 \pi}{2}$$

$$i_y = i_z = \frac{r}{2}$$

$$i_x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

## 7.3 Transformation des Trägheitstensors auf parallel verschobene Bezugachsen

Voraussetzung für die weiteren Betrachtungen: Der Ursprung des  $y, z$ -Koordinatensystems liegt im Flächenschwerpunkt.



Transformationsvorschrift:

$$\begin{aligned}\eta &= y - b \\ \zeta &= z - c\end{aligned}$$

Einsetzen in die Definition des FTRM liefert:

$$\begin{aligned}J_\eta &= \int \zeta^2 dA = \int (z - c)^2 dA = \\ &= \underbrace{\int z^2 dA}_{J_y} - 2c \underbrace{\int z dA}_0 + c^2 \underbrace{\int dA}_A = J_y + c^2 A\end{aligned}$$

Definition des SP, lt. Voraussetzung  $z_s = 0$

$$\text{analog: } J_\zeta = J_z + b^2 A$$

$$\begin{aligned}J_{\eta\zeta} &= \int \eta\zeta dA = \int (y - b)(z - c) dA = \\ &= \underbrace{\int yz dA}_{J_{yz}} - c \underbrace{\int y dA}_{y_s = 0} - b \underbrace{\int z dA}_{z_s = 0} + bc \underbrace{\int dA}_A = J_{yz} + bcA\end{aligned}$$

$$J_\xi = J_\eta + J_\zeta = J_y + J_z + (b^2 + c^2)A = J_x + (b^2 + c^2)A$$

Wir fassen zusammen:

$$J_{\eta} = J_y + c^2 A$$

$$J_{\zeta} = J_z + b^2 A$$

$$J_{\xi} = J_x + (b^2 + c^2) A$$

$$J_{\eta\zeta} = J_{yz} + bc A$$

Verschiebungssatz (parallel-axis theorem)

bzw.

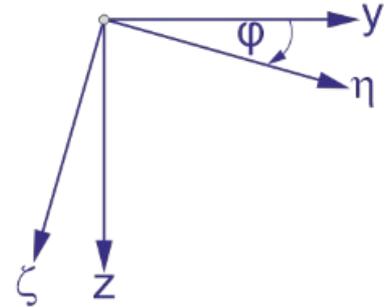
Satz von Steiner

Hinweise:

- Für das Deviationsmoment sind  $b$  und  $c$  vorzeichenbehaftet einzusetzen!
- Der Satz von Steiner in der oben angegebenen Form funktioniert nur, wenn  $x$ ,  $y$  und  $z$  Schwerachsen sind! Demnach werden Trägheitsmomente mit zunehmender Entfernung der Bezugsachse von der Schwerachse größer.
- Möchte man von einer beliebigen Achse auf eine dazu parallele Achse transformieren, so funktioniert das nur über den Umweg einer Schwerachse!

## 7.4 Transformation des Trägheitstensors auf verdrehte Bezugsachsen

Die Vorgehensweise ist prinzipiell gleich wie für die Transformation auf parallele Achsen. Allerdings sieht die Transformationsvorschrift etwas komplizierter aus:



$$\eta = y \cos \varphi + z \sin \varphi$$

$$\zeta = -y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} J_{\eta} &= \int \zeta^2 dA = \int (y \sin \varphi)^2 dA - \int 2yz \sin \varphi \cos \varphi dA + \int (z \cos \varphi)^2 dA = \\ &= \sin^2 \varphi \underbrace{\int y^2 dA}_{J_z} + \cos^2 \varphi \underbrace{\int z^2 dA}_{J_y} - 2 \sin \varphi \cos \varphi \underbrace{\int yz dA}_{J_{yz}} = J_y \cos^2 \varphi + J_z \sin^2 \varphi - 2J_{yz} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

analog:

$$J_{\zeta} = \int \eta^2 dA = \cos^2 \varphi \int y^2 dA + \sin^2 \varphi \int z^2 dA + 2 \sin \varphi \cos \varphi \int yz dA = J_y \sin^2 \varphi + J_z \cos^2 \varphi + 2J_{yz} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} J_{\eta\zeta} &= \int \eta\zeta dA = \int [(y \cos \varphi + z \sin \varphi)(-y \sin \varphi + z \cos \varphi)] dA = \\ &= \int (z^2 - y^2) \sin \varphi \cos \varphi dA + \int yz (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) dA = (J_y - J_z) \sin \varphi \cos \varphi + J_{yz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$

wird daraus:

$$\begin{aligned} J_{\eta} &= \frac{1}{2}(J_y + J_z) + \frac{1}{2}(J_y - J_z)\cos 2\varphi - J_{yz}\sin 2\varphi \\ J_{\zeta} &= \frac{1}{2}(J_y + J_z) - \frac{1}{2}(J_y - J_z)\cos 2\varphi + J_{yz}\sin 2\varphi \\ J_{\eta\zeta} &= \frac{1}{2}(J_y - J_z)\sin 2\varphi + J_{yz}\cos 2\varphi \end{aligned}$$

Allg: **Additionstheoreme:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(\*)

Man erkennt sofort, dass  $J_{\eta} + J_{\zeta} = J_y + J_z = J_x = J_{\xi} = J_p$ . Somit ist also das polare FTRM **invariant** gegenüber Verdrehung des Koordinatensystems.

## Generelle Anmerkung zur Transformation eines Tensors:

In der Mechanik trifft öfter das Problem auf einen im x,y,z-KS angeschriebenen symmetrischen Tensor  $\underline{\underline{T}}$  (z.B. Trägheitstensor, Spannungstensor, Verzerrungstensor) in einem dazu verdrehten  $\xi,\eta,\zeta$ -KS darstellen zu müssen  $\rightarrow \underline{\underline{T'}}$ . Die allgemeine Transformationsvorschrift lautet:

$$\underline{\underline{T'}} = \begin{pmatrix} \underline{e}_\xi^T \\ \underline{e}_\eta^T \\ \underline{e}_\zeta^T \end{pmatrix} \underline{\underline{T}} (\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta)$$

Für die einzelnen Komponenten von  $\underline{\underline{T'}}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} T'_{\xi\xi} &= \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\xi & T'_{\xi\eta} &= T'_{\eta\xi} = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\eta = \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\xi \\ T'_{\eta\eta} &= \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\eta & T'_{\eta\zeta} &= T'_{\zeta\eta} = \underline{e}_\eta^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\zeta = \underline{e}_\zeta^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\eta \\ T'_{\zeta\zeta} &= \underline{e}_\zeta^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\zeta & T'_{\zeta\xi} &= T'_{\xi\zeta} = \underline{e}_\zeta^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_\zeta \end{aligned}$$

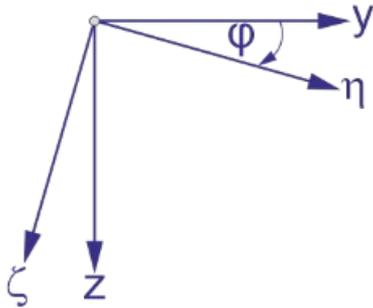
oder noch kürzer:

$$T'_{ij} = \underline{e}_i^T \underline{\underline{T}} \underline{e}_j \quad \text{mit } i, j \dots \xi, \eta, \zeta$$

Es zahlt sich aus, sich diese Formel auswendig zu merken. Sie gilt für  $i, j \dots \eta, \zeta$  auch in 2D und wird im Verlauf der Vorlesung noch öfters auftauchen.

Anmerkung: In der Komponentendarstellung wird der zur besseren Unterscheidbarkeit eingefügte Superskript (') in weiterer Folge weggelassen. Bei gleichen Indizes wird üblicherweise nur einer angeschrieben, also  $T'_{\xi\xi} \rightarrow T_\xi$ .

## Beispiel: Transformation des Trägheitstensors



$$\underline{e}_\eta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\zeta = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis stimmt mit den zuvor auf anderem Weg bereits hergeleiteten Formeln überein.

$$\begin{aligned} J_\eta &= \underline{e}_\eta^T \underline{J} \underline{e}_\eta = (\cos\varphi, \sin\varphi) \begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \\ &= (\cos\varphi, \sin\varphi) \begin{pmatrix} J_y \cos\varphi - J_{yz} \sin\varphi \\ -J_{zy} \cos\varphi + J_z \sin\varphi \end{pmatrix} = \\ &= J_y \cos^2\varphi + J_z \sin^2\varphi - 2J_{yz} \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\zeta &= \underline{e}_\zeta^T \underline{J} \underline{e}_\zeta = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= (-\sin\varphi, \cos\varphi) \begin{pmatrix} -J_y \sin\varphi - J_{yz} \cos\varphi \\ J_{zy} \sin\varphi + J_z \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= J_y \sin^2\varphi + J_z \cos^2\varphi + 2J_{yz} \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -J_{\eta\zeta} &= \underline{e}_\eta^T \underline{J} \underline{e}_\zeta = (\cos\varphi, \sin\varphi) \begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= (\cos\varphi, \sin\varphi) \begin{pmatrix} -J_y \sin\varphi - J_{yz} \cos\varphi \\ J_{zy} \sin\varphi + J_z \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= -(J_y - J_z) \sin\varphi \cos\varphi - J_{yz} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

## 7.5 Hauptträgheitsmomente, Trägheitshauptachsen

Besonders interessant sind in der Mechanik jene KS, bei denen die Deviationsmomente verschwinden. Anders formuliert: Um welchen Winkel  $\varphi^*$  muss man die Bezugsachsen verdrehen, damit  $J_{\eta\zeta} = 0$ :

$$J_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}(J_y - J_z)\sin 2\varphi^* + J_{yz}\cos 2\varphi^* = 0 \quad \rightarrow \quad \tan 2\varphi^* = \frac{2J_{yz}}{J_z - J_y}$$

Der Winkel  $\varphi^*$  definiert die Lage der **Trägheitshauptachsen**.

**Behauptung:** Für diese Achsenlage (also für  $\varphi^*$ ) werden  $J_\eta$  und  $J_\zeta$  extremal.

**Beweis:** Ableiten der Transformationsgleichungen in der Form (\*) liefert

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_\eta}{d\varphi} &= -\frac{1}{2}(J_y - J_z)2\sin 2\varphi - J_{yz}2\cos 2\varphi = 0 \\ \frac{dJ_\zeta}{d\varphi} &= +\frac{1}{2}(J_y - J_z)2\sin 2\varphi + J_{yz}2\cos 2\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{2J_{yz}}{J_z - J_y}} \quad \text{wie oben}$$

Die zugehörigen Flächenträgheitsmomente erhält man, wenn man  $\tan 2\varphi^*$  in (\*) einsetzt.

Mit  $\sin 2\varphi = \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi}}$  und  $\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi}}$  erhält man dann:

$$J_1 = \frac{J_y + J_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

$$J_2 = \frac{J_y + J_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

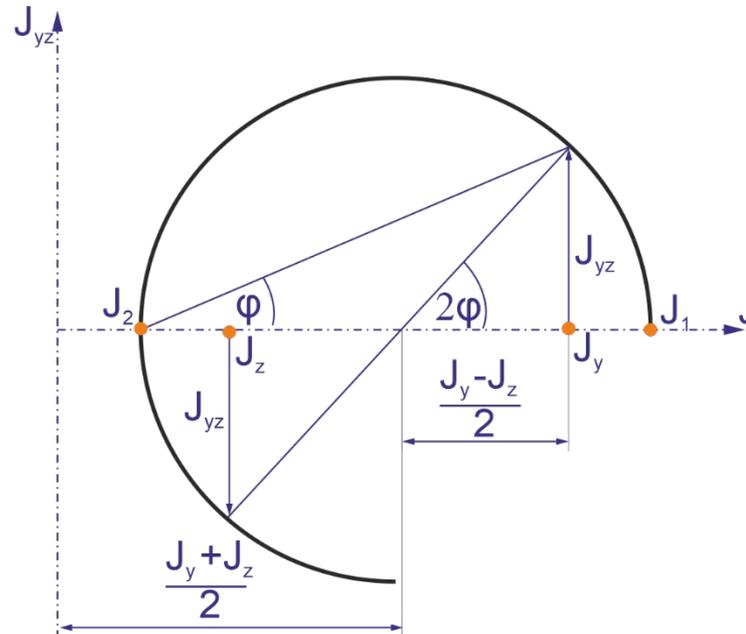
Man nennt sie **Hauptträgheitsmomente**, wobei  $J_1$  das Maximum und  $J_2$  das Minimum bezeichnet.

Für die obigen Formeln existiert eine einfache grafisch Interpretation, mit deren Hilfe man sie sich jederzeit schnell überlegen kann. Diese tritt auch an anderer Stelle auf (Spannungen, Verzerrungen) und wird dort ausführlich erklärt.

Symmetrieachsen sind automatisch Trägheitshauptachsen, weil ja, wie schon erwähnt das Deviationsmoment dann verschwindet.

### 7.5.1 Mohrscher Trägheitskreis

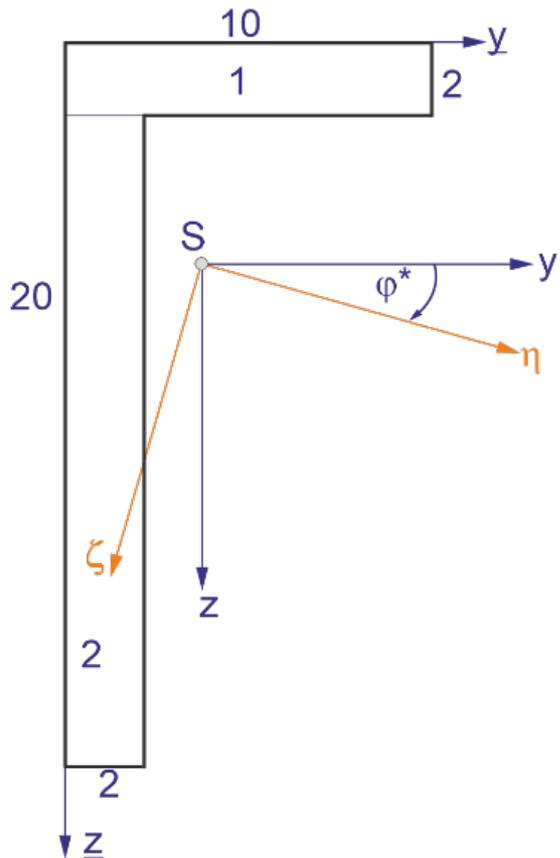
Der Mohrsche Trägheitskreis ist die grafische Interpretation der Transformationsformeln für Trägheitsmomente im verdrehten Koordinatensystem.



Im Gegensatz zum Mohrschen Spannungskreis (Kapitel 8) kann der Mohrsche Trägheitskreis nur rechts vom Koordinatenursprung liegen, da Hauptträgheitsmomente stets positiv sind.

Anmerkung: Der Mohrsche Spannungskreis wird im Kapitel 8 Spannungszustand ausführlich behandelt. Die Interpretation ist identisch.

Beispiel: Hauptträgheitsachsen eines L-Profiles



$$J_{\bar{y}} = \underbrace{\frac{2^3 \cdot 10}{12} + 1^2 \cdot 20}_{J_{\bar{y}}^{(1)}} + \underbrace{\frac{18^3 \cdot 2}{12} + 11^2 \cdot 36}_{J_{\bar{y}}^{(2)}} = \underline{5355 \text{ cm}^4}$$

$$J_{\bar{z}} = \underbrace{\frac{10^3 \cdot 2}{12} + 5^2 \cdot 20}_{J_{\bar{z}}^{(1)}} + \underbrace{\frac{2^3 \cdot 18}{12} + 1^2 \cdot 36}_{J_{\bar{z}}^{(2)}} = \underline{715 \text{ cm}^4}$$

$$J_{\bar{y}\bar{z}} = \underbrace{0 + 5 \cdot 1 \cdot 20}_{J_{\bar{y}\bar{z}}^{(1)}} + \underbrace{0 + 1 \cdot 11 \cdot 36}_{J_{\bar{y}\bar{z}}^{(2)}} = \underline{496 \text{ cm}^4}$$

Satz von Steiner:

$$\bar{y}_s = \frac{5 \cdot 20 + 1 \cdot 36}{56} = \underline{2.43 \text{ cm}}$$

$$\bar{z}_s = \frac{1 \cdot 20 + 11 \cdot 36}{56} = \underline{7.43 \text{ cm}}$$

$$J_y = J_{\bar{y}} - 7.43^2 \cdot 56 = \underline{2263 \text{ cm}^4}$$

$$J_z = J_{\bar{z}} - 2.43^2 \cdot 56 = \underline{384 \text{ cm}^4}$$

$$J_{yz} = J_{\bar{y}\bar{z}} - 2.43 \cdot 7.43 \cdot 56 = \underline{-515 \text{ cm}^4}$$

Trägheitshauptachsen:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2J_{yz}}{J_z - J_y} = \frac{-2 \cdot 515}{384 - 2263} = 0.548 \rightarrow \underline{\varphi^* = 14.37^\circ}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} (2263 + 384) + \frac{1}{2} (2263 - 384) \cdot \cos 28.74^\circ + 515 \cdot \sin 28.74^\circ = \underline{2407 \text{ cm}^4}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (2263 + 384) - \frac{1}{2} (2263 - 384) \cdot \cos 28.74^\circ - 515 \cdot \sin 28.74^\circ = \underline{223 \text{ cm}^4}$$

$$J_{12} = \frac{1}{2} (2263 - 384) \cdot \sin 28.74^\circ - 515 \cdot \cos 28.74^\circ = \underline{0 \text{ cm}^4}$$