6. Schwerpunkt, Massenmittelpunkt

6.1 Definitionen

Geg.: Parallelkraftsystem, zusätzlich alle Kräfte gleich orientiert.
Ges.: resultierende Einzelkraft $\underline{R}$ und deren Lage $\underline{r}_k$.

Äquivalenz:

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \text{ mit } \underline{F}_i = F_i \underline{e}$$

$$\underline{r}_k \times \underline{R} = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

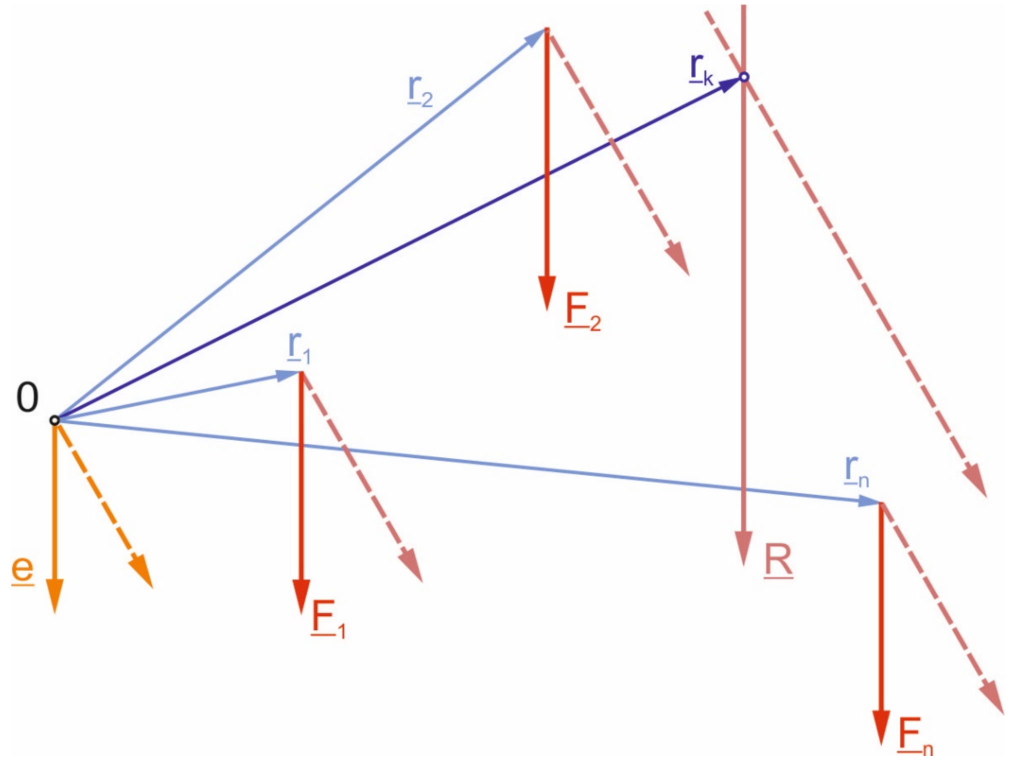
$$\underline{r}_k \times \sum F_i \underline{e} = \sum (\underline{r}_i \times F_i \underline{e})$$

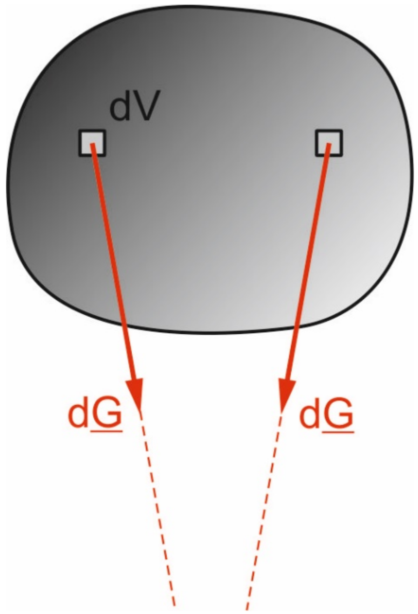
$$(\underline{r}_k \sum F_i) \times \underline{e} = (\sum \underline{r}_i F_i) \times \underline{e}$$

$$(\underline{r}_k \sum F_i - \sum \underline{r}_i F_i) \times \underline{e} = \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{r}_k = \frac{\sum \underline{r}_i F_i}{\sum F_i}}$$

Kräftemittelpunkt





Für technische Anwendungen sind alle $d\underline{G}$ parallel, somit gelten wieder obige Beziehungen für den Kräftemittelpunkt:

⇒ Kräftemittelpunkt ≡ Schwerpunkt

$$d\underline{G} = \underline{\gamma} dV = \underline{g} dm = \underline{g} \rho dV$$

$\underline{\gamma}$ ... spezifisches Gewicht [N/m³]
ρ ... Massendichte [kg/m³]

$$dm = \rho dV, \underline{\gamma} = \rho \underline{g}$$

Schwerpunkt:

$$\underline{r}_s = \frac{\int \underline{r} dG}{\int dG} = \frac{\int \underline{r} \gamma dV}{\int \gamma dV} = \frac{\int \underline{r} g dm}{\int g dm} = \frac{\int \underline{r} g \rho dV}{\int g \rho dV}$$

Anmerkung zur Erdbeschleunigung g:

Nordpol: g=9.8322 m/s²
45° : g=9.8063 m/s²
Äquator: g=9.7805 m/s²

Normalfallbeschleunigung: g_n=9.80665 m/s²

Für g = const. (homogenes Schwerefeld) gilt:

$$\boxed{\underline{r}_M = \frac{\int \underline{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \underline{r} \rho dV}{\int \rho dV}}$$

Massenmittelpunkt

Für ρ = const. (homogener Körper) gilt:

$$\underline{r}_M = \underline{r}_V = \frac{1}{V} \int \underline{r} dV$$

Volumenmittelpunkt

In Koordinaten ausgeschrieben:

$$x_M = \frac{1}{m} \int x \rho(x, y, z) dV$$

$$y_M = \frac{1}{m} \int y \rho(x, y, z) dV$$

$$z_M = \frac{1}{m} \int z \rho(x, y, z) dV$$

Für ebene Platten konstanter Dicke t gilt $dm = \rho_F dA$, Flächendichte $\rho_F = \rho t$. $[\rho_F] = \mathrm{kg/m^2}$

$$\underline{r}_M = \frac{1}{m} \int_A \rho_F \underline{r} dA$$

Für ρ_F = const. (homogene Platte) gilt:

$$\underline{r}_M = \underline{r}_A = \frac{1}{A} \int_A \underline{r} dA$$

„Flächenschwerpunkt“

Für Stabwerke konstanter Querschnittsfläche f gilt $dm = \rho_L ds$, Liniendichte $\rho_L = \rho f$. $[\rho_L] = \mathrm{kg/m}$

$$\underline{r}_M = \frac{1}{m} \int_L \rho_L \underline{r} ds$$

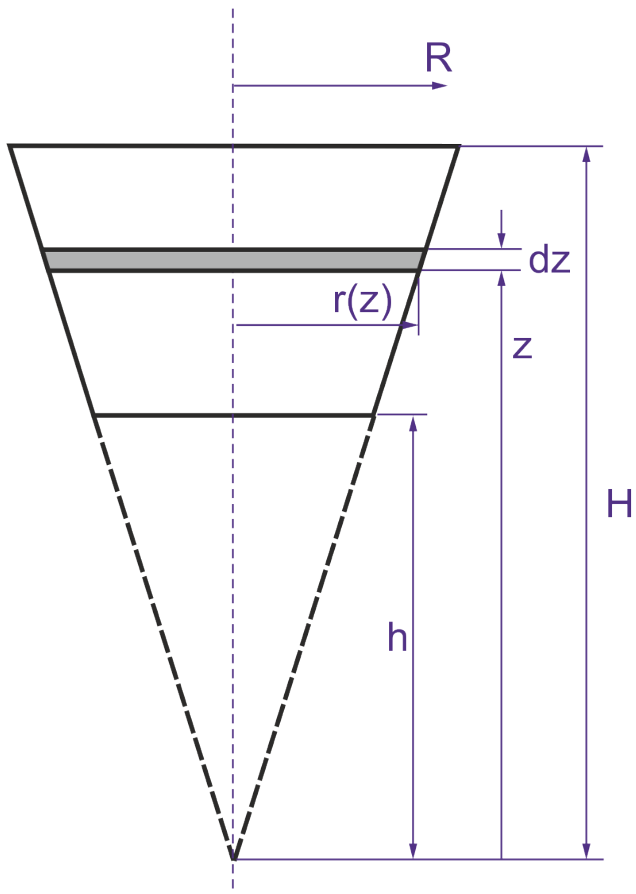
L … Stablänge

Für ρ_L = const. (homogene Stäbe) gilt:

$$\underline{r}_M = \underline{r}_L = \frac{1}{L} \int_L \underline{r} ds$$

„Linienschwerpunkt“

Beispiel: Schwerpunkt des Kegelstumpfs



geg.: R, H, h

ges.: z_S

$$z_S = \frac{1}{V}\int z dV$$

$$\frac{r(z)}{z} = \frac{R}{H} \Rightarrow r(z) = \frac{R}{H}z$$

$$dV = r^2(z)\pi dz = \frac{R^2}{H^2}z^2\pi dz$$

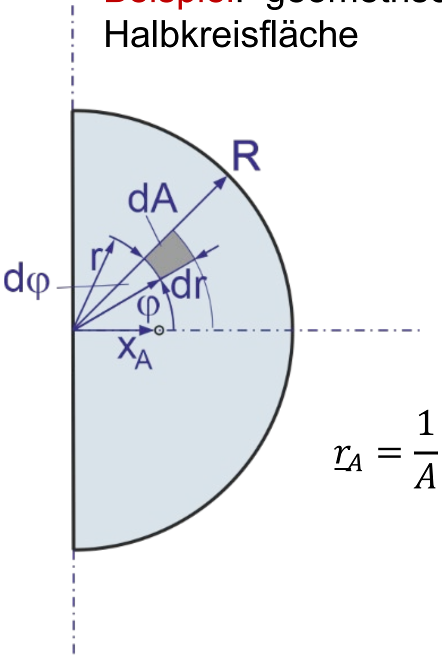
$$V = \int_h^H \frac{R^2}{H^2}z^2\pi dz = \frac{R^2\pi}{3H^2}(H^3 - h^3)$$

$$\int_h^H z dV = \frac{R^2}{H^2}\pi\int_h^H z^3 dz = \frac{R^2}{H^2}\pi\frac{H^4 - h^4}{4}$$

$$z_S = \frac{3}{4}\frac{H^4 - h^4}{H^3 - h^3}$$

für $h = 0 \rightarrow z_S = \frac{3}{4}H$

Beispiel: geometrischer Schwerpunkt der Halbkreisfläche



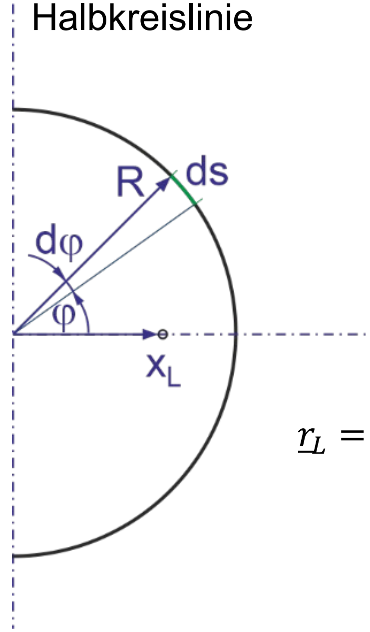
$$\underline{r}_A = \frac{1}{A}\int_A \underline{r}\,dA$$

$$dA = r dr d\varphi, \qquad A = \tfrac{1}{2}R^2\pi$$

$$x_A = \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} r cos\varphi r dr d\varphi =$$

$$= \frac{4}{R^2\pi}\int_0^R r^2 dr = \underline{\frac{4R}{3\pi}}$$

Beispiel: geometrischer Schwerpunkt der Halbkreislinie



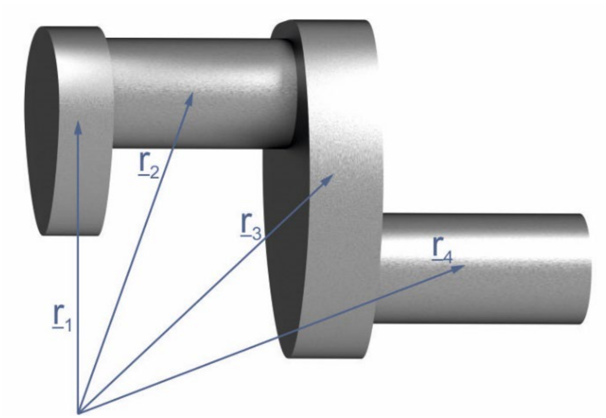
$$\underline{r}_L = \frac{1}{L}\int_L \underline{r}\,ds$$

$$ds = R d\varphi, \qquad L = R\pi$$

$$x_L = \frac{1}{R\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R cos\varphi R d\varphi = \underline{\frac{2R}{\pi}}$$

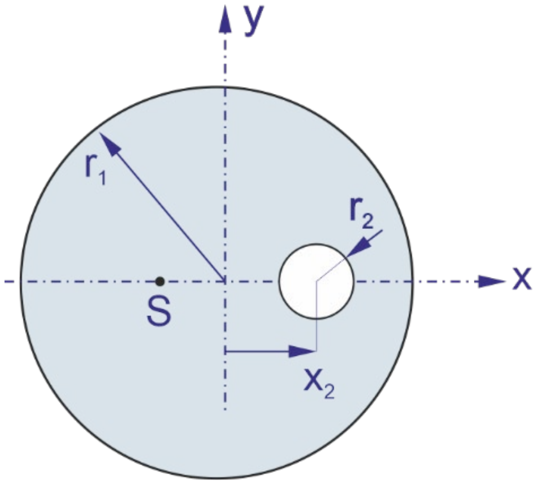
6.2 Teilschwerpunktsatz:

Besteht ein Körper aus mehreren Teilkörpern bekannter SP-Lage, so gilt:



$$\boxed{\underline{r}_S = \frac{\sum \underline{r}_i m_i}{\sum m_i}}$$

Beispiel: Flächen-SP, homogenes Blech mit Loch



geg.: $r_1,\ r_2,\ x_2$

ges.: x_S

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

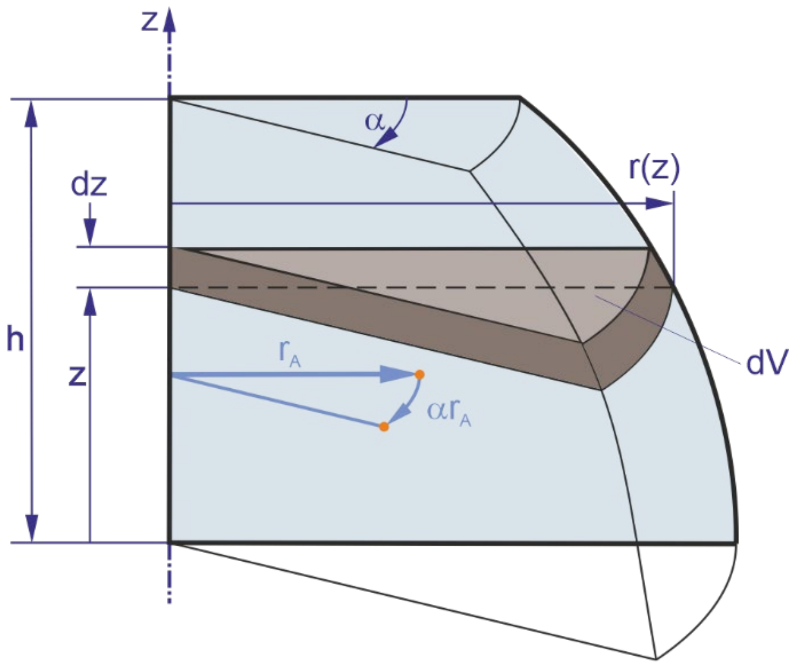
$$y_s = 0$$

	x_i	A_i	$x_i A_i$
1	0	$r_1^2\pi$	0
2	x_2	$-r_2^2\pi$	$-r_2^2\pi x_2$
$\sum$		$(r_1^2 - r_2^2)\pi$	$-r_2^2\pi x_2$

$$\underline{x_S = \frac{-r_2^2 x_2}{r_1^2 - r_2^2}}$$

6.3 Regeln von Pappus-Guldin

für Rotationskörper gilt:



A…Meridianfläche

$$dV = \frac{r^2(z)\pi}{2\pi}\alpha\, dz$$

Das Volumen des Rotationskörpers ist somit

$$V = \int_{z=0}^{h} dV = \alpha \int_0^h \frac{r^2(z)dz}{2}$$

Andererseits gilt für den SP der Meridianfläche

$$r_A = \frac{1}{A}\int_{z=0}^{h} \frac{1}{2} r(z)\, \overbrace{r(z)dz}^{dA}$$

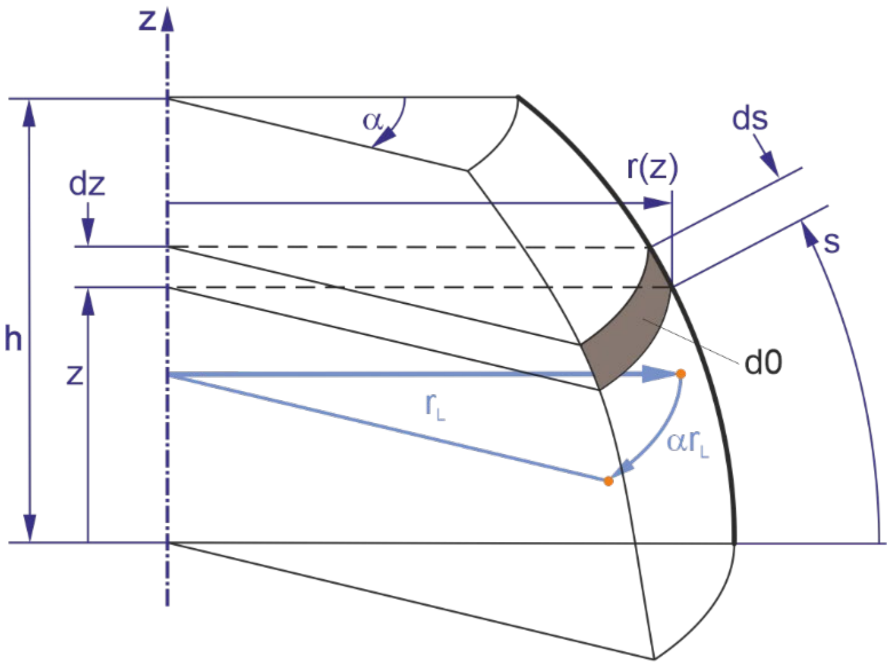
Vergleicht man die beiden Integrale, erkennt man

$$\boxed{V = \alpha\, r_A\, A}$$

1. Guldinsche Regel

für $\alpha = 2\pi$: $V = 2\pi\, r_A\, A$

Analog gilt für die Oberfläche von Rotationskörpern:



$$dO = \mathrm{r}(z)\,\alpha\, ds$$

Die Oberfläche des Rotationskörpers ist

$$O = \alpha \int_{s=0}^{L} r(z) ds$$

Andererseits gilt für den Linienschwerpunkt

$$L r_L = \int_{s=0}^{L} r(z) ds$$

Vergleicht man die beiden Integrale, sieht man

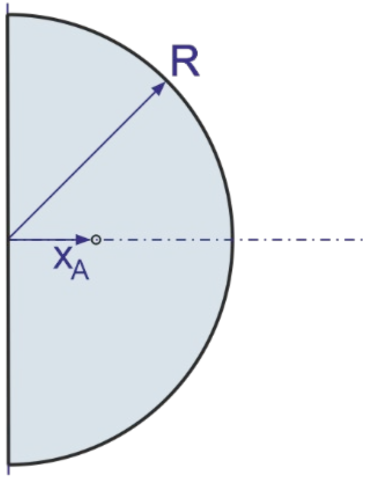
$$\boxed{O = \alpha\, r_L L}$$

2. Guldinsche Regel

L…Länge der Erzeugenden des Rotationskörpers

für $\alpha = 2\pi$: $O = 2\pi\, r_L L$

Beispiel: SP der Halbkreisfläche



V_K ...Volumen des Rotationskörpers

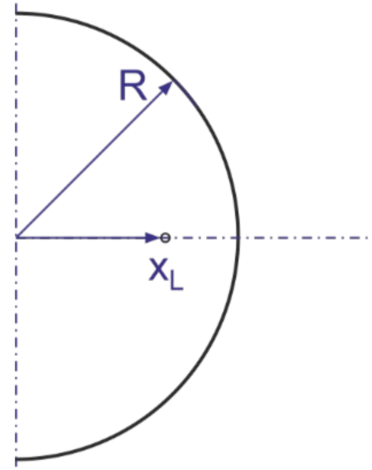
A_{HK}...Inhalt der Meridianfläche

$$V_K = \frac{4r^3\pi}{3}, \qquad A_{HK} = \frac{r^2\pi}{2}$$

Nach der 1. Guldinschen Regel gilt

$$r_A = \frac{V_K}{2\pi\, A_{HK}} = 2 \cdot \frac{4r^3\pi}{6\pi \cdot r^2\pi} = \underline{\frac{4r}{3\pi}}$$

Beispiel: SP der Halbkreislinie



O_K ...Oberfläche des Rotationskörpers

L_{HK}...Länge des Halbkreises

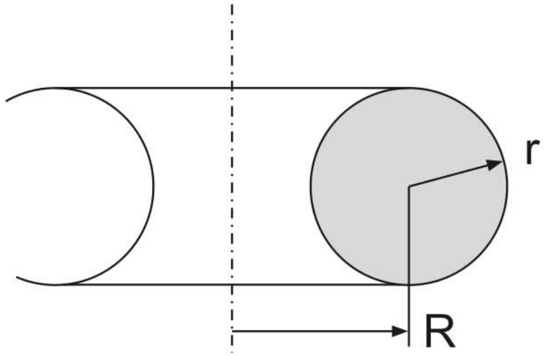
$$O_K = 4r^2\pi, \qquad L_{HK} = \mathrm{r}\pi$$

Nach der 2. Guldinschen Regel gilt:

$$r_L = \frac{O_K}{2\pi\, L_{HK}} = \frac{4r^2\pi}{2r\pi^2} = \underline{\frac{2r}{\pi}}$$

Die Pappus - Guldinschen Regeln können umgekehrt auch zur Volums-, bzw. Oberflächenberechnung verwendet werden.

Beispiel: Torus



Die Schwerpunktslage sowie der Inhalt der Meridianfläche sind bekannt:

$$r_A = R, \qquad A = r^2\pi$$

Somit kann das Volumen des Rotationskörpers, also des Torus, berechnet werden:

$$V = 2\pi R r^2 \pi = \underline{2Rr^2\pi^2}$$