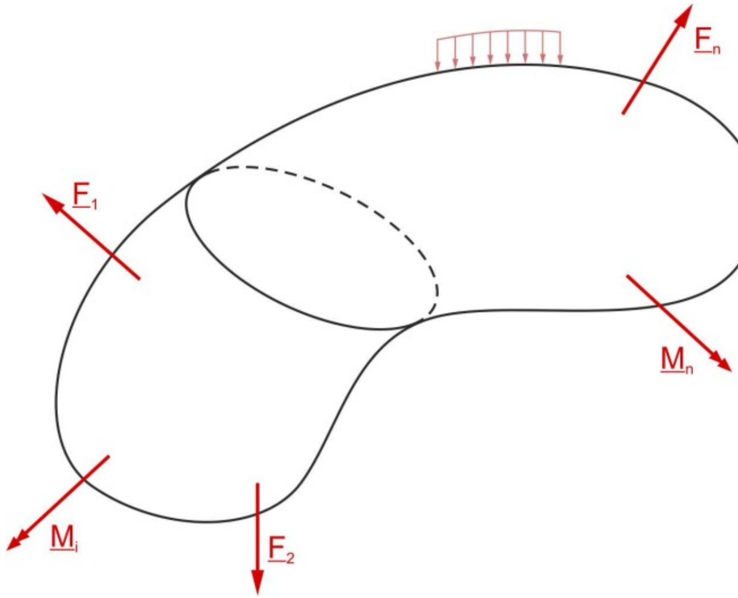
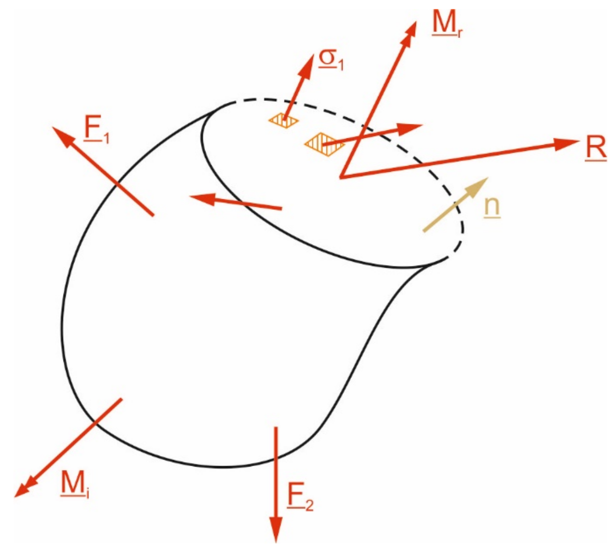
5. Schnittgrößen

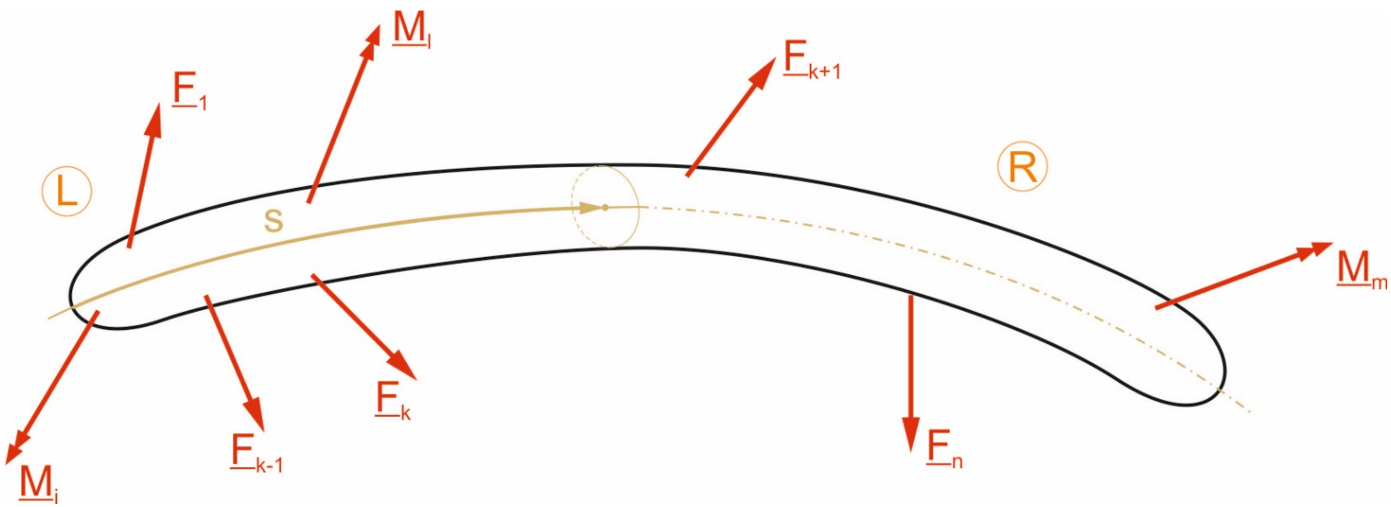
5.1 Schnittprinzip



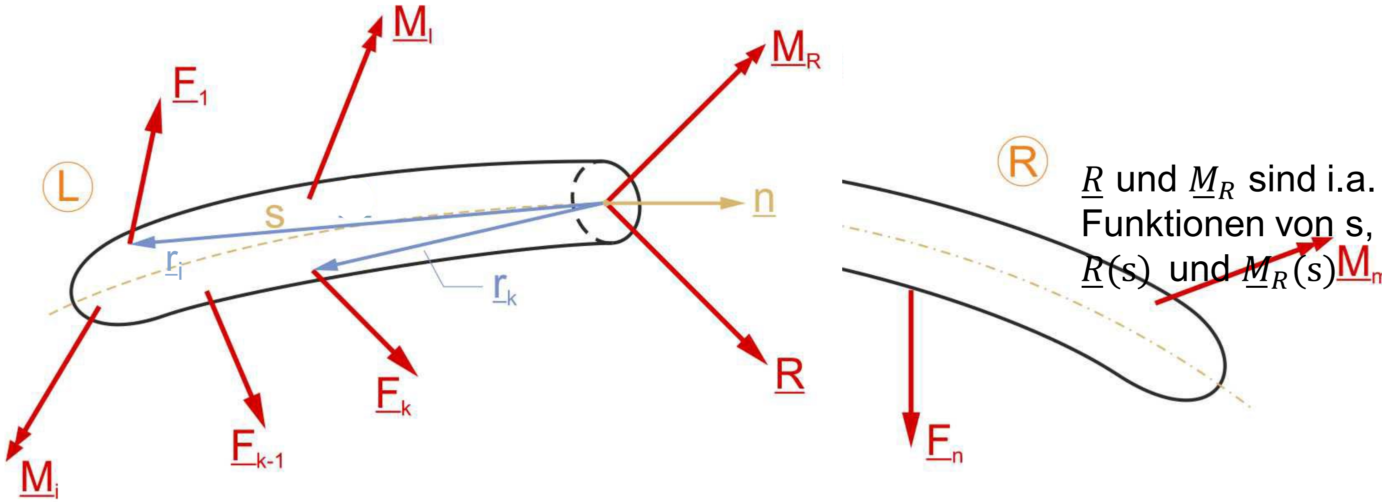


5.2 Schnittgrößen für stabförmige Körper

Querschnittsabmessungen sind klein gegen die Länge. Die Stabachse ist die Verbindungslinie der Schwerpunkte der einzelnen Querschnitte.



Teil L: positives Schnittufer, s zeigt in Richtung von n

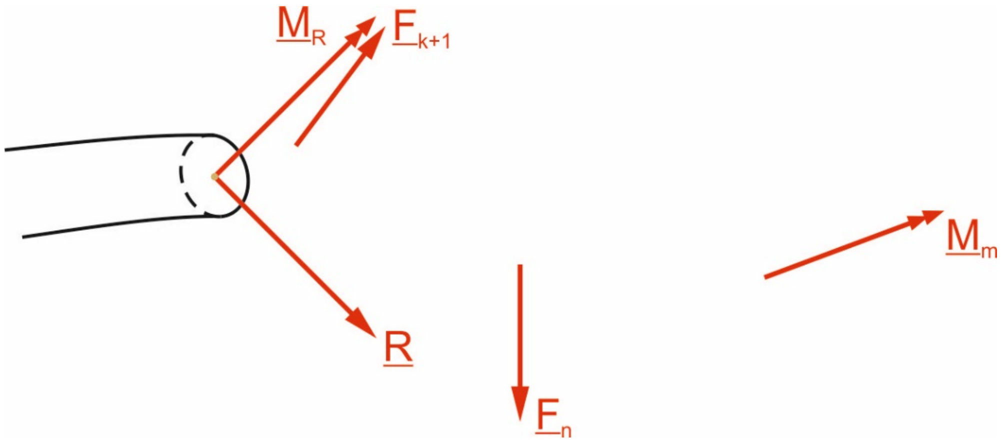


$\underline{R}$ und $\underline{M}_R$ sind i.a. Funktionen von s, also: $\underline{R}(s)$ und $\underline{M}_R(s)$

Gleichgewicht: $$\sum_{i=1}^{k} \underline{F}_i + \underline{R}(s) = \underline{0} \qquad (\Delta)$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \sum_{j=1}^{l} \underline{M}_j + \underline{M}_R(s) = \underline{0} \qquad (\Delta\Delta)$$

Teil L, positives Schnittufer: Alternative durch Reduktion

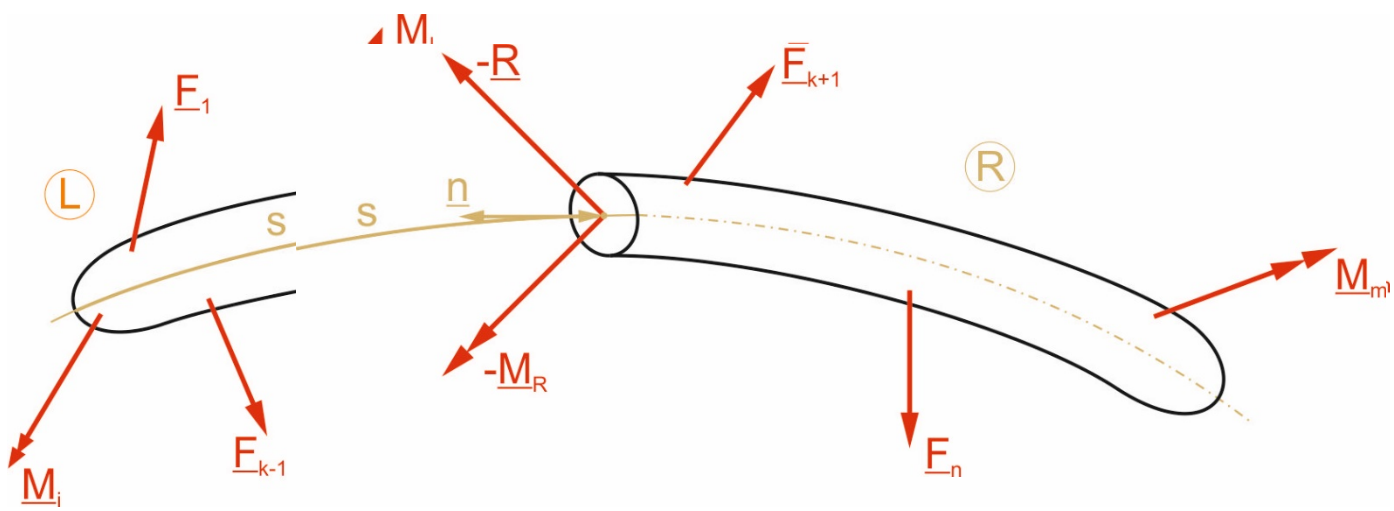


Reduktion des am weggeschnittenen Teil R angreifenden Kraftsystems in den geometr. Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts an der Stelle s:

$$\underline{R}(s) = \sum_{i=k+1}^{n} \underline{F}_i \qquad (*)$$

$$\underline{M}_R(s) = \sum_{i=k+1}^{n} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \sum_{j=l+1}^{m} \underline{M}_j \qquad (**)$$

Teil R: negatives Schnittufer, s zeigt gegen die Richtung von n

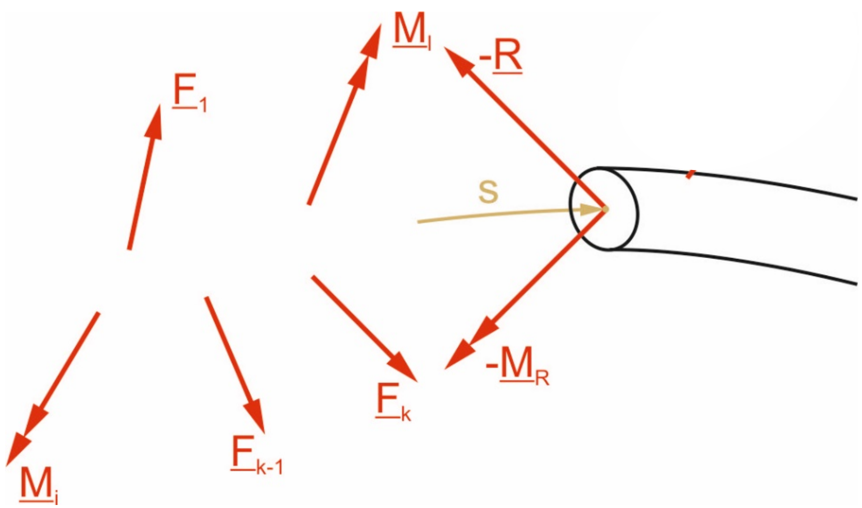


Gleichgewicht:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \underline{F_i} - \underline{R} = \underline{0} \qquad (*)$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} (\underline{r_i} \times \underline{F_i}) + \sum_{j=l+1}^{m} \underline{M_j} - \underline{M_R} = \underline{0} \qquad (**)$$

Teil R, negatives Schnittufer: Alternative durch Reduktion



Reduktion des am weggeschnittenen Teil L angreifenden Kraftsystems in den geometr. Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts an der Stelle s:

$$-\underline{R} = \sum_{i=1}^{k} \underline{F}_i \qquad (\Delta)$$

$$-\underline{M}_R = \sum_{i=1}^{k} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \sum_{j=1}^{l} \underline{M}_j \qquad (\Delta\Delta)$$

$$-\underline{R} = \sum_{i=1}^{k} \underline{F}_i \qquad (\Delta)$$

$$\underline{R} = \sum_{i=k+1}^{n} \underline{F}_i \qquad (*)$$

$$-\underline{M}_R = \sum_{i=1}^{k} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \sum_{j=1}^{l} \underline{M}_j \qquad (\Delta\Delta)$$

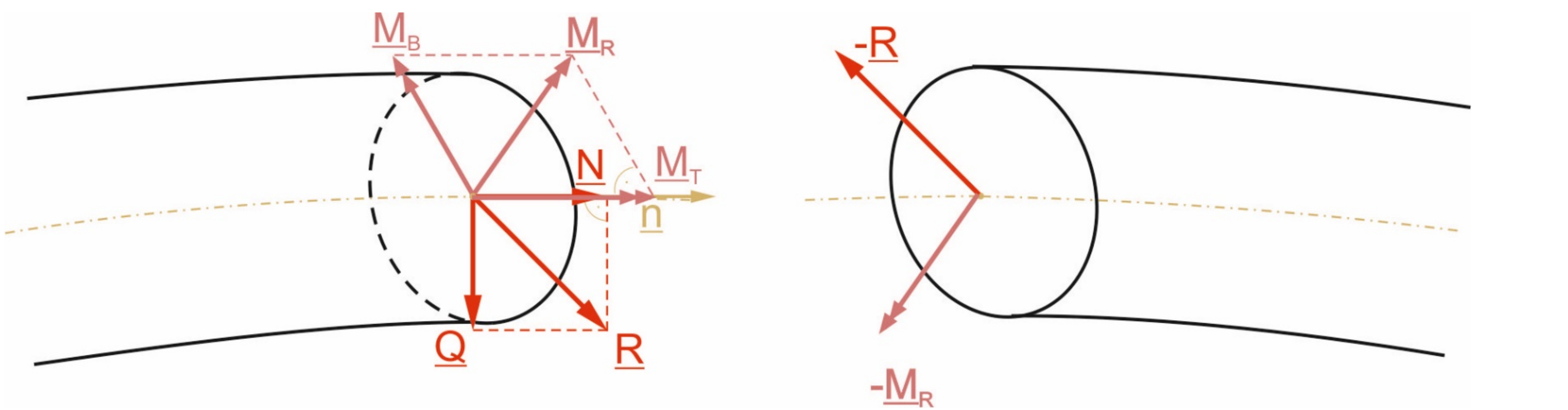
$$\underline{M}_R = \sum_{i=k+1}^{n} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \sum_{j=l+1}^{m} \underline{M}_j \qquad (**)$$

Addition von (*) und (Δ) bzw. (**) und $(\Delta\Delta)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j = \underline{0}$$

Wir erhalten also wieder die Gleichgewichtsbedingungen für den gesamten Körper

Zerlegung von $\underline{R}(s)$ und $\underline{M}_R(s)$ in Komponenten:



$\underline{N}$ .... Normalkraft (Längskraft) [N]

$\underline{Q}$ ....Querkraft [N]

$\underline{M}_B$ .... Biegemoment [Nm]

$\underline{M}_T$ .... Torsionsmoment [Nm]

$$\underline{R} = \underline{N} + \underline{Q}$$

$$\underline{M}_R = \underline{M}_B + \underline{M}_T$$

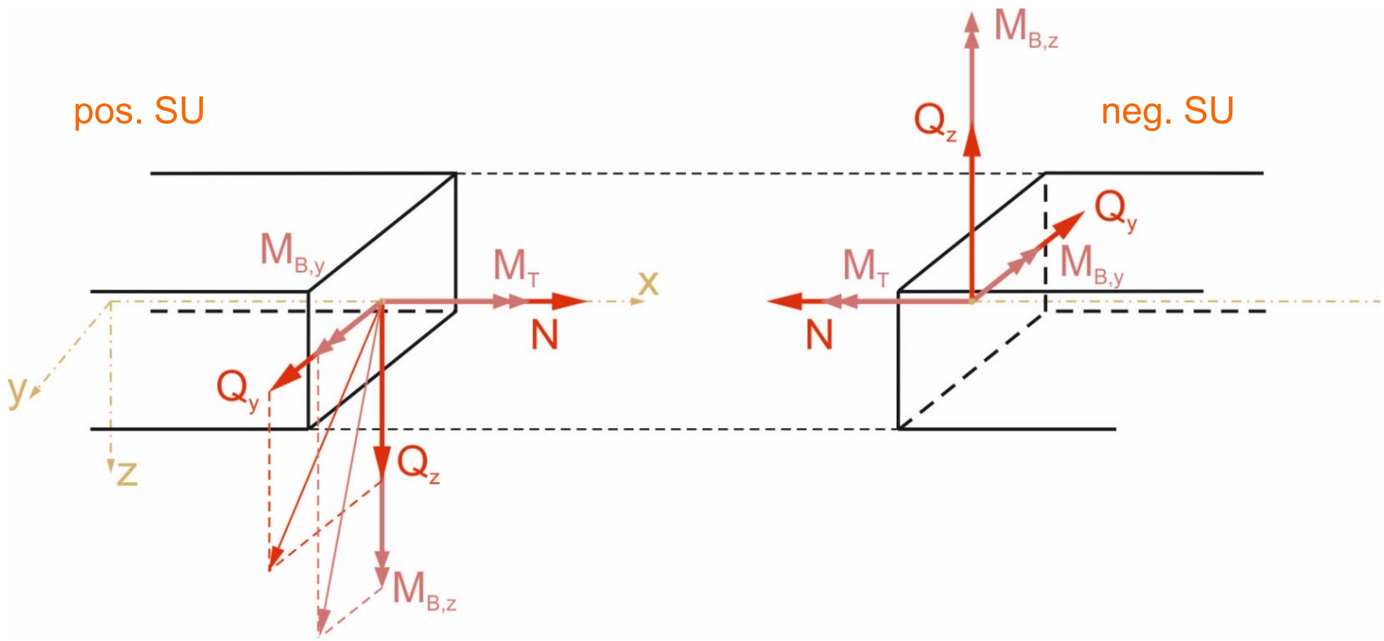
$$|\underline{N}| = \underline{R} \cdot \underline{n}$$

$$|\underline{M}_T| = \underline{M}_R \cdot \underline{n}$$

$$|\underline{Q}| = \sqrt{R^2 - N^2}$$

$$|\underline{M}_B| = \sqrt{M_R^2 - M_T^2}$$

5.3 Schnittgrößen für Stäbe mit geraden Achsen



Vorzeichenregel:
Am pos. SU werden Schnittgrößen in positiver Koordinatenrichtung eingetragen!
Am neg. SU werden Schnittgrößen in negativer Koordinatenrichtung eingetragen!

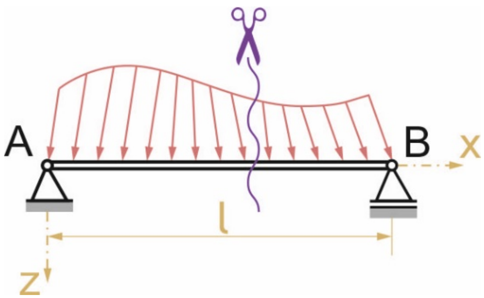
Ein räumliches Kraftsystem, dessen Kräfte symmetrisch bzgl. der xz-Ebene sind, führt nach Reduktion in einen beliebigen Punkt A zu $\underline{R}$ in dieser xz-Ebene und $\underline{M}_{R,A}$ normal zur xz-Ebene.

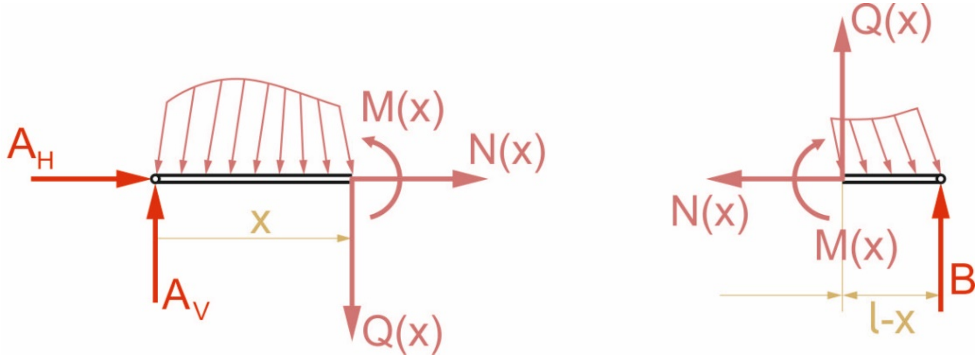
$$\Rightarrow Q_y = 0, \quad M_{Bz} = 0, \quad M_T = 0$$

Der gerade Träger in der Ebene:

Voraussetzungen:

- statisch bestimmt gelagert,
- Querschnittsform symm. bezüglich der *xz*-Ebene,
- Belastung symm. bezüglich der *xz*-Ebene.



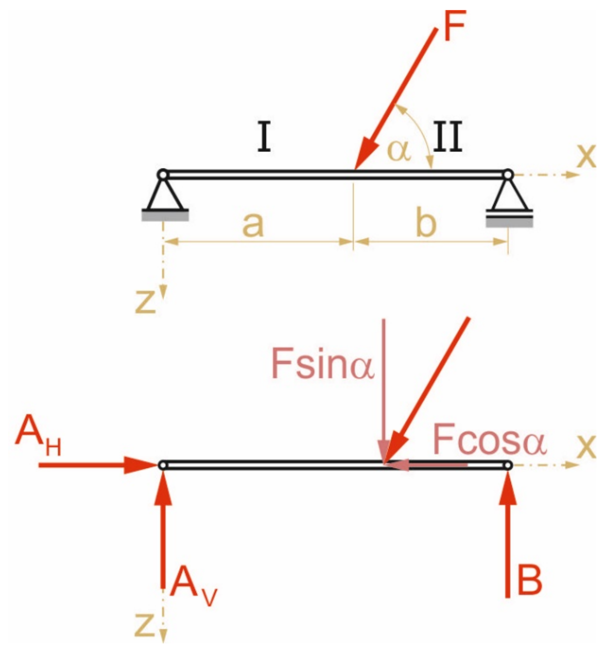


Schema bei der Schnittgrößenberechnung:

1. Auflagerreaktionen
2. Einteilen in Gültigkeitsbereiche (Felder)
3. Schnitt an allgemeiner Stelle im Bereich
4. Schnittufer aussuchen und skizzieren
5. Schnittgrößen mit richtigem Vorzeichen eintragen
6. Schnittgrößen durch Gleichgewicht oder Reduktion

Beispiel:

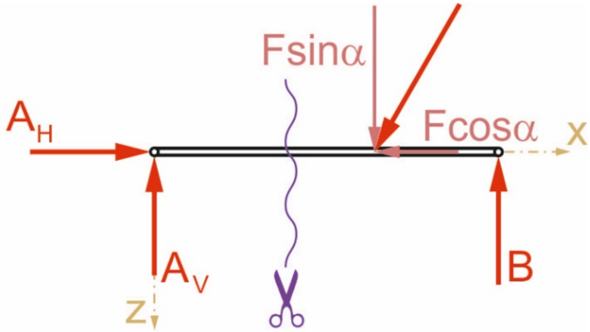
geg.: F, a, b, α
ges.: Schnittgrößen $N(x), Q(x), M(x)$

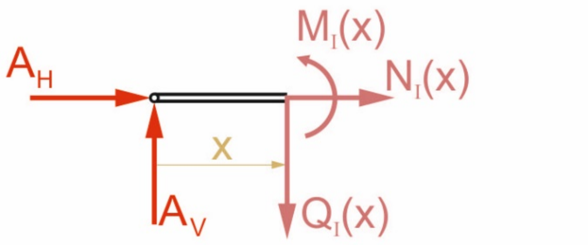


$$A_H = F\cos\alpha \qquad A_V = F\sin\alpha \frac{b}{a+b}$$

$$B = F\sin\alpha \frac{a}{a+b}$$

Bereich I: $0 \leq x \leq a$





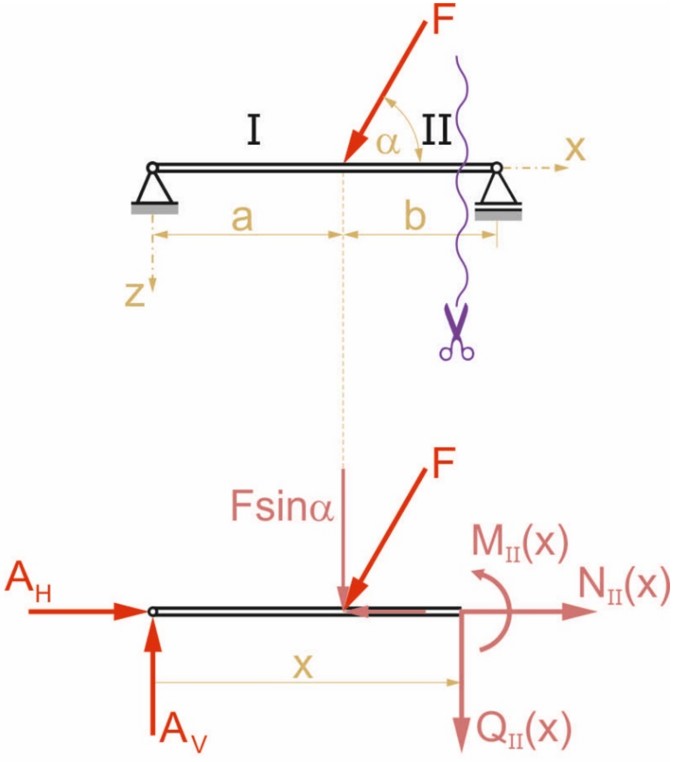
Gleichgewicht:

$$N_I(x) + A_H = 0 \quad \rightarrow \quad N_I(x) = -F\cos\alpha$$

$$Q_I(x) - A_V = 0 \quad \rightarrow \quad Q_I(x) = F\sin\alpha \frac{b}{a+b}$$

$$M_I(x) - A_V x = 0 \quad \rightarrow \quad M_I(x) = F\sin\alpha \frac{b}{a+b} x$$

Bereich $\mathrm{II}: a \leq x \leq a+b$



$$N_{II}(x) + A_H - F\cos\alpha = 0$$

$$\rightarrow N_{II}(x) = F\cos\alpha - F\cos\alpha = 0$$

$$Q_{II}(x) - A_V + F\sin\alpha = 0$$

$$\rightarrow Q_{II}(x) = -F\sin\alpha + F\sin\alpha\frac{b}{a+b} = -F\sin\alpha\frac{a}{a+b}$$

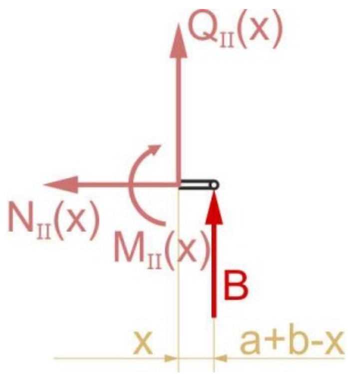
$$M_{II}(x) - A_V x + F\sin\alpha(x-a) = 0$$

$$\rightarrow M_{II}(x) = F\sin\alpha\frac{b}{a+b}x - F\sin\alpha(x-a) =$$

$$= F\frac{\sin\alpha}{a+b}(bx - ax - bx + a^2 + ab) =$$

$$= F\frac{a\sin\alpha}{a+b}(a+b-x)$$

Alternative: negatives Schnittufer

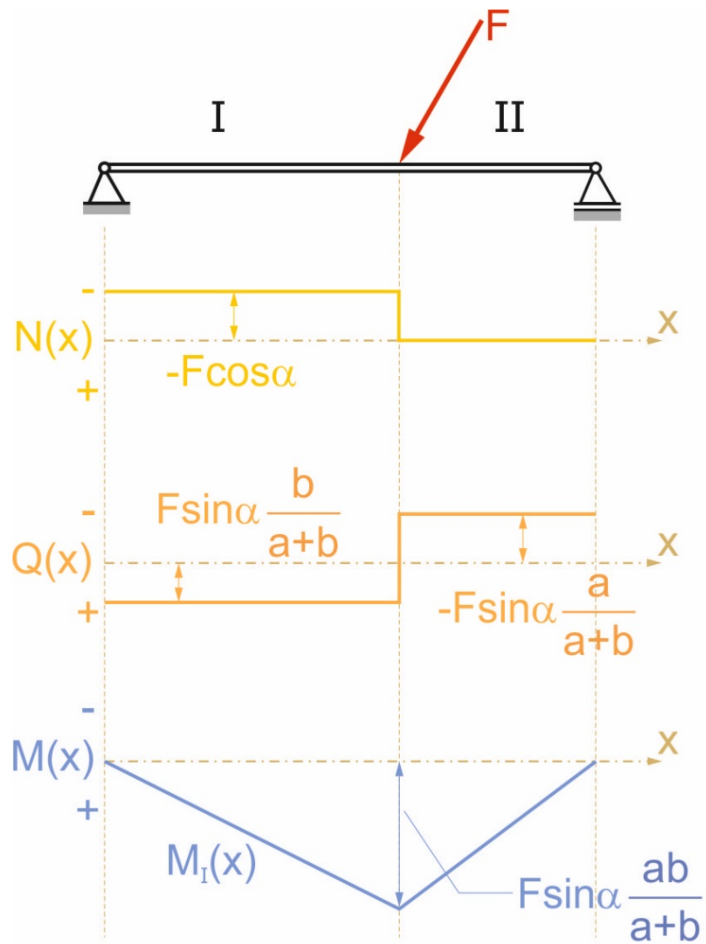


$$N_{II}(x) = 0$$

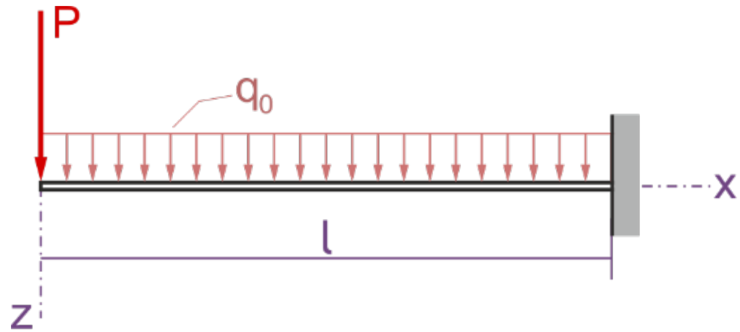
$$Q_{II}(x) = -B = -F\sin\alpha\frac{a}{a+b}$$

$$M_{II}(x) = B(a+b-x) = F\sin\alpha\frac{a}{a+b}(a+b-x)$$

Verläufe der Schnittgrößen:

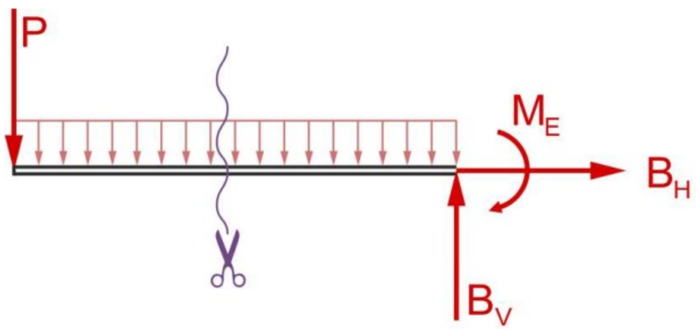


Beispiel: Kragbalken mit Streckenlast



geg.: q_o, l, P

ges.: $N(x), Q(x), M(x)$



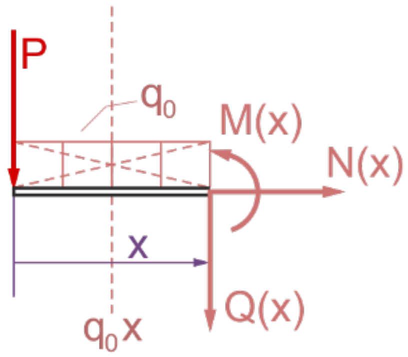
$$M_E = Pl + q_o \frac{l^2}{2}$$

$$B_H = 0$$

$$B_V = P + q_o l$$

Beispiel: Kragbalken mit Streckenlast

positives Schnittufer:



$$N(x) = 0$$

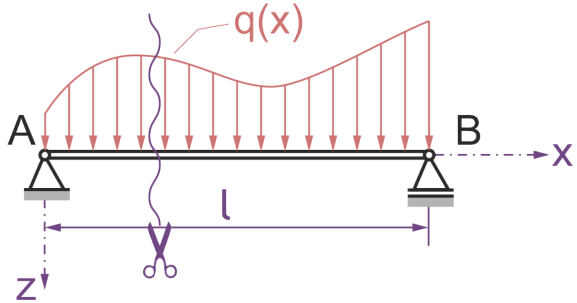
$$Q(x) + P + q_o x = 0$$

$$Q(x) = -P - q_o x$$

$$M(x) + Px + q_o x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

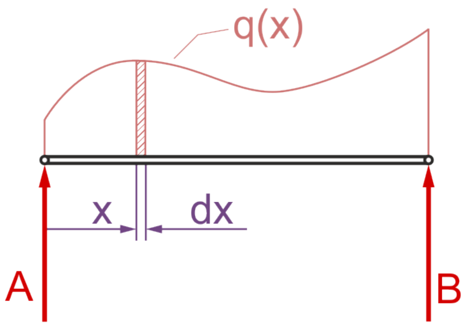
$$M(x) = -Px - q_o \frac{x^2}{2}$$

Vorgehensweise bei beliebig verteilter Last:



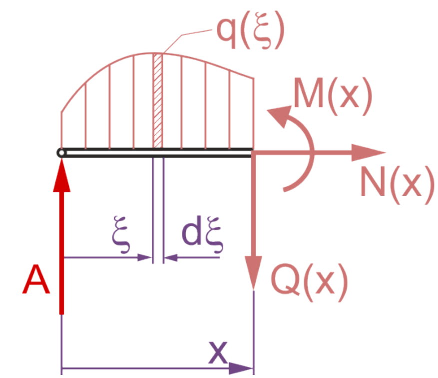
geg.: $q(x), l$

ges.: $Q(x), M(x)$



$$\left.\begin{aligned} A + B - \int_0^l q(x)dx = 0 \\ Bl - \int_0^l q(x)x dx = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A, B$$

Bereich $0 \leq x \leq l$

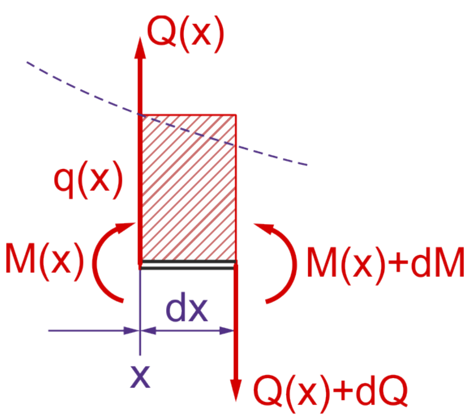


$$Q(x) - A + \int_0^x q(\xi)d\xi = 0$$

$$M(x) - Ax + \int_0^x (x - \xi)q(\xi)d\xi = 0$$

$$\Rightarrow N(x), Q(x), M(x)$$

für gerade Träger gelten folgende Zusammenhänge:



$$\sum F_{iv} = 0: \quad -\cancel{Q(x)} + \cancel{Q(x)} + dQ + q(x)dx = 0$$

$$q(x)dx + dQ = 0 \quad |: dx \rightarrow \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_i = 0: \quad -\cancel{M(x)} + \cancel{M(x)} + dM - Q(x)dx + q(x)dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$dM - Q(x)dx + \underbrace{q(x)dx \cdot \frac{dx}{2}}_{dx^2 \approx 0} = 0 \quad |: dx$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x)$$

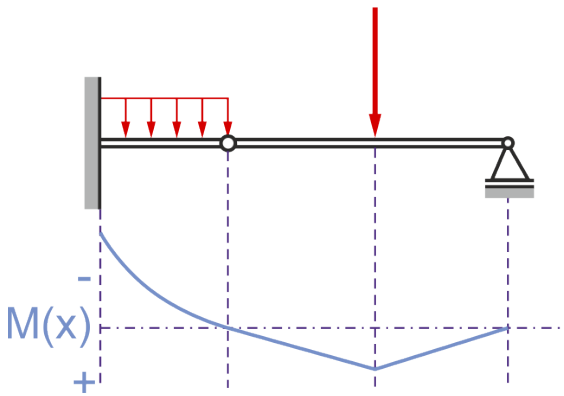
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -q(x) \\ \frac{dM}{dx} &= Q(x) \end{aligned}}$$

An bestimmten Stellen lassen sich a-priori Aussagen über das Biegemoment treffen.

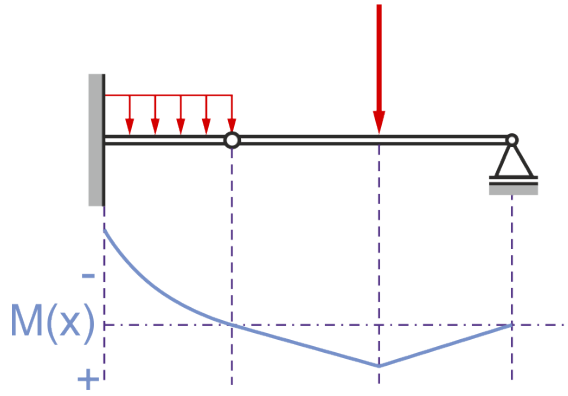
Beispiele:

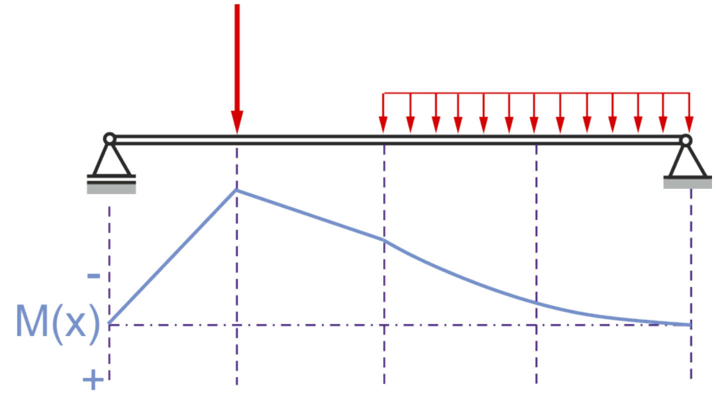
- Einspannung: M i.a. ungleich 0, oft Kandidat für Maximum
- Gerbergelenk: M gleich 0
- Zwischenstütze: der M-Verlauf hat einen Knick, M i.a. ungleich 0, oft sogar Kandidat für Maximum
- Randstütze oder freies Ende: M gleich 0.
- Angreifendes Moment: M zeigt eine Sprungstelle

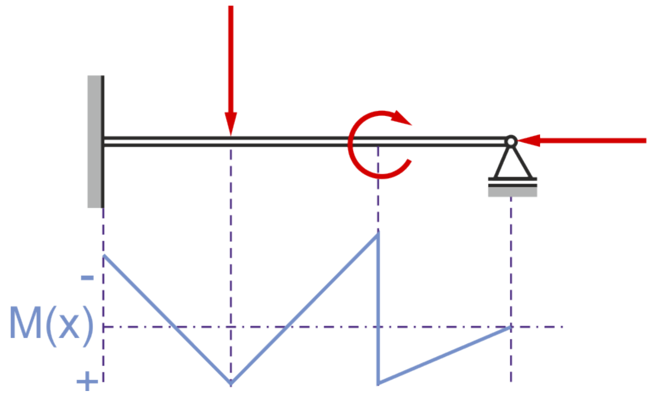
Im Bereich einer Streckenlast: M verläuft nicht-linear



Beispiele für Momentenverläufe:

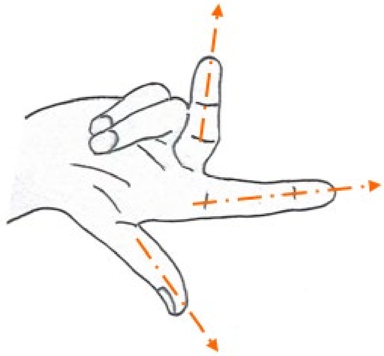




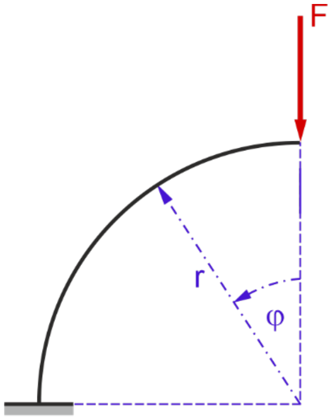


5.4 Schnittgrößen für gekrümmte Stäbe

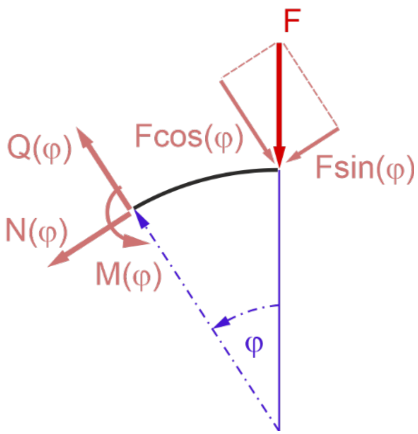
Schnittgrößen lassen sich auch für gekrümmte Balken bestimmen, wobei es hier vorteilhaft ist mit einem Polarkoordinatensystem zu arbeiten.



Beispiel: Schnittgrößen am gekrümmten Balken



geg.: r, F
ges.: $N(\varphi), Q(\varphi), M(\varphi)$



$$N(\varphi) = -Fsin(\varphi)$$
$$Q(\varphi) = Fcos(\varphi)$$
$$M(\varphi) = Frsin(\varphi)$$

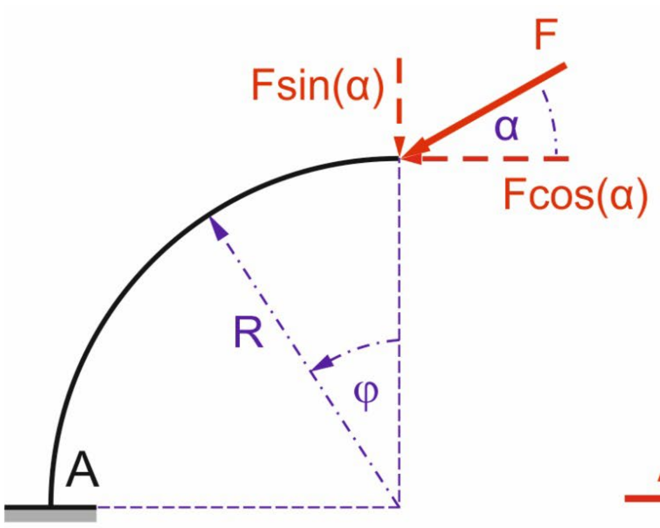
Der differenzielle Zusammenhang zwischen Querkraft und Biegemoment gilt auch für gekrümmte Balken:

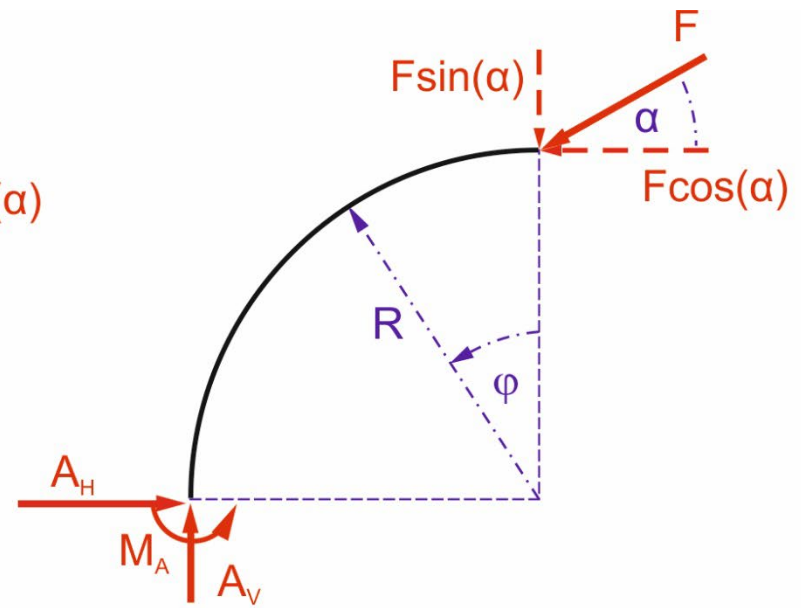
$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \qquad dx = r\,d\varphi$$

$$\boxed{\frac{dM}{rd\varphi} = Q(\varphi)}$$

Beispiel:

geg.: $F, \mathrm{R}, \tan(\alpha) = \frac{3}{4}$
ges.: Schnittgrößen $N(\varphi), Q(\varphi), M(\varphi)$

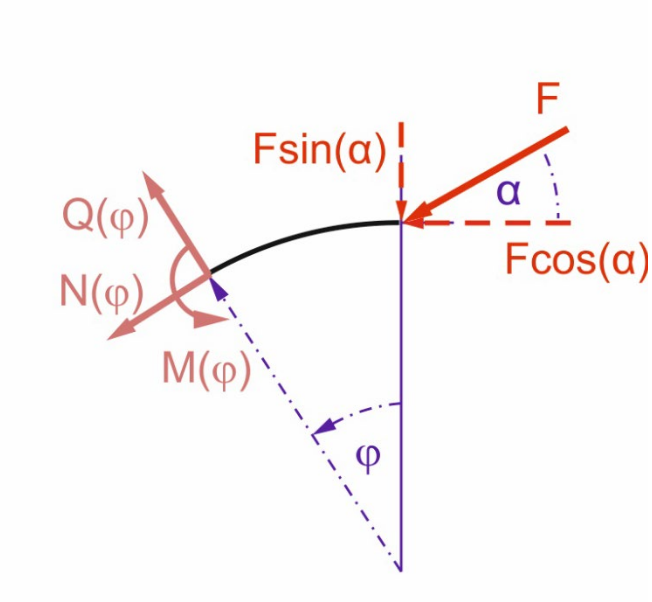




$$A_H = \frac{4}{5} F \qquad A_V = \frac{3}{5} F$$

$$M_A = -\frac{1}{5} F R$$

Gleichgewicht:



$$N(\varphi)+\frac{4}{5}F\cos\varphi+\frac{3}{5}F\sin\varphi=0$$

$$Q(\varphi)-\frac{3}{5}F\cos\varphi+\frac{4}{5}F\sin\varphi=0$$

$$M(\varphi)+\frac{3}{5}F\mathrm{R}\sin\varphi-\frac{4}{5}FR(1-\cos\varphi)=0$$

Daraus folgt:

$$N(\varphi)=-\frac{4}{5}F\cos\varphi-\frac{3}{5}F\sin\varphi$$

$$Q(\varphi)=\frac{3}{5}F\cos\varphi-\frac{4}{5}F\sin\varphi$$

$$M(\varphi)=-\frac{3}{5}F\mathrm{R}\sin\varphi+\frac{4}{5}FR(1-\cos\varphi)$$