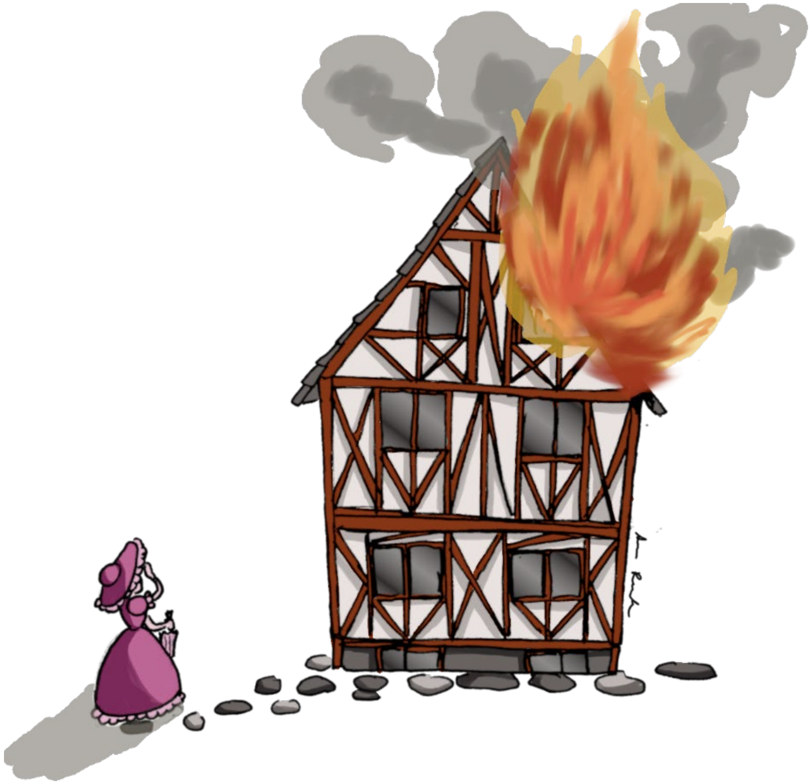
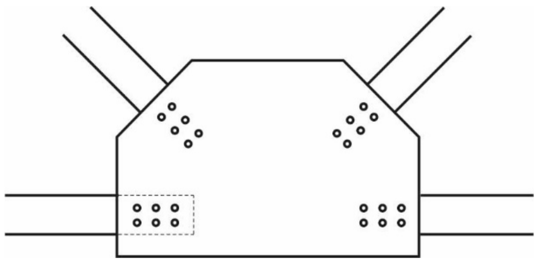
3. Fachwerke



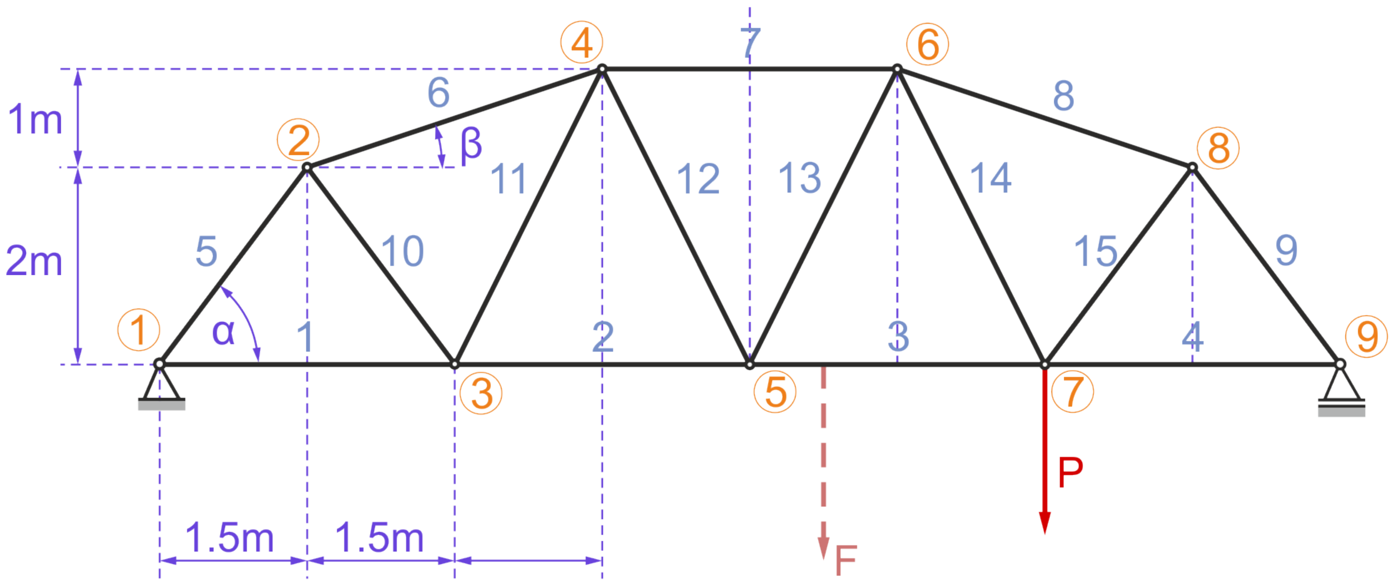
3.1 Grundbegriffe

Sind Konstruktionen, die aus geraden Stäben zusammengesetzt sind. Die Stäbe sind miteinander verschweißt oder über Knotenbleche miteinander verbunden.



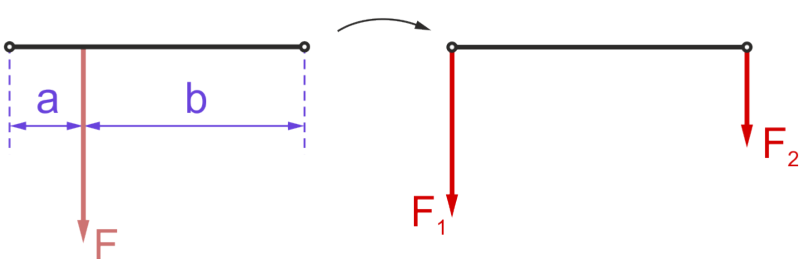
Idealisierungen:

- die Stäbe sind durch reibungsfreie Gelenke verbunden, (1)
- die Stabachsen treffen einander in einem Punkt, (2)
- alle äußeren Kräfte greifen nur in Knoten an, (3)
- Stäbe werden als masselos angesehen. (4)



Obergurt:	Stäbe 5 - 9
Diagonalstäbe:	Stäbe 10 - 15
Untergurt:	Stäbe 1 - 4

Ist Voraussetzung (3) nicht erfüllt, muss F auf die Nachbarknoten aufgeteilt werden:



$$F_1 = \frac{b}{a+b}F$$

$$F_2 = \frac{a}{a+b}F$$

Ist das gesamte Fachwerk im Glgw., so ist auch jeder Knoten im Glgw. und gemäß Voraussetzung (2) und (3) ein zentrales (ebenes) Kraftsystem. Damit erhält man aus den Glgw.-bed. 2 Gleichungen pro Knoten.

Um die Stabkräfte mit den Mitteln der Stabstatik berechnen zu können, muss das Fachwerk (auch innerlich) statisch bestimmt sein. Mit obiger Aussage erhält man genau dann genügend Gleichungen, wenn:

$$\boxed{s + z = 2k}$$

Bedingung für statische Bestimmtheit

s … Anzahl der Stäbe, hier $s = 15$
k … Anzahl der Knoten, hier $k = 9$
z … Anzahl der unbekannten Auflagerkomponenten, hier $z = 3$

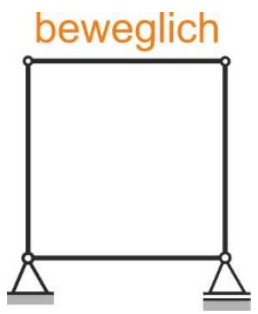
Im konkreten Fall: $15 + 3 = 2 \cdot 9$, also statisch bestimmt.

Wenn $s + z > 2k \rightarrow$ statisch unbestimmt

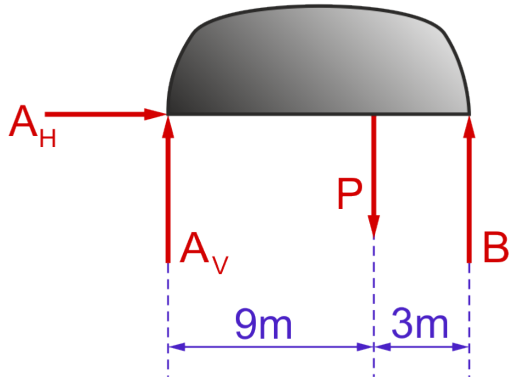
z.B.: $6 + 3 > 2 \cdot 4$

Wenn $s + z < 2k \rightarrow$ beweglich

z.B.: $4 + 3 < 2 \cdot 4$



Naheliegenderweise wird man – falls möglich – zunächst einmal die Auflagerreaktionen aus dem globalen Glgw. (d.h. am Gesamtsystem) bestimmen:



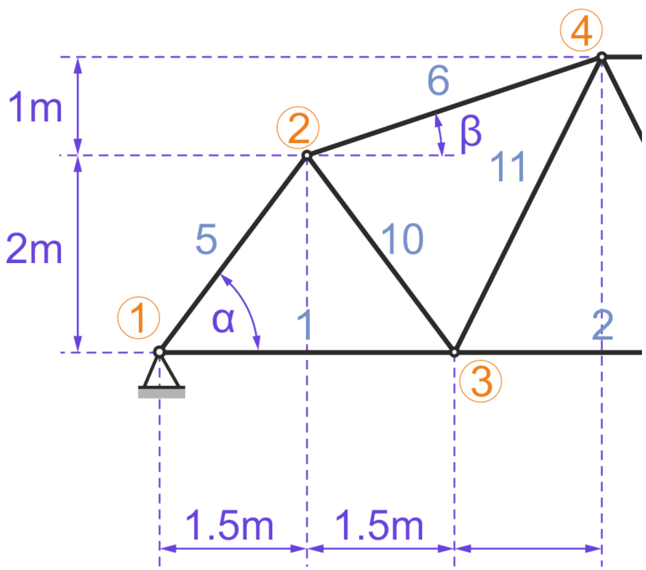
Berechnung der Auflagerkräfte:

$$A_V = \frac{1}{4} P$$

$$B = \frac{3}{4} P$$

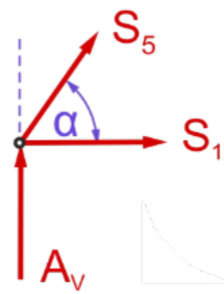
3.2 Berechnung der Stabkräfte

Knotenpunktverfahren (Rundschnittverfahren)



$$\cos\alpha = \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2+2^2}} = 0.6$$
$$\sin\alpha = 0.8$$
$$\tan\beta = \frac{1}{3}$$

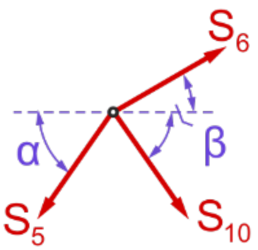
Knoten 1:



$$S_1 + S_5\cos\alpha = 0$$
$$S_5\sin\alpha + A_V = 0$$

$$\boxed{S_1 = 0.1875P,\ \ S_5 = -0.3125P}$$

Knoten 2:



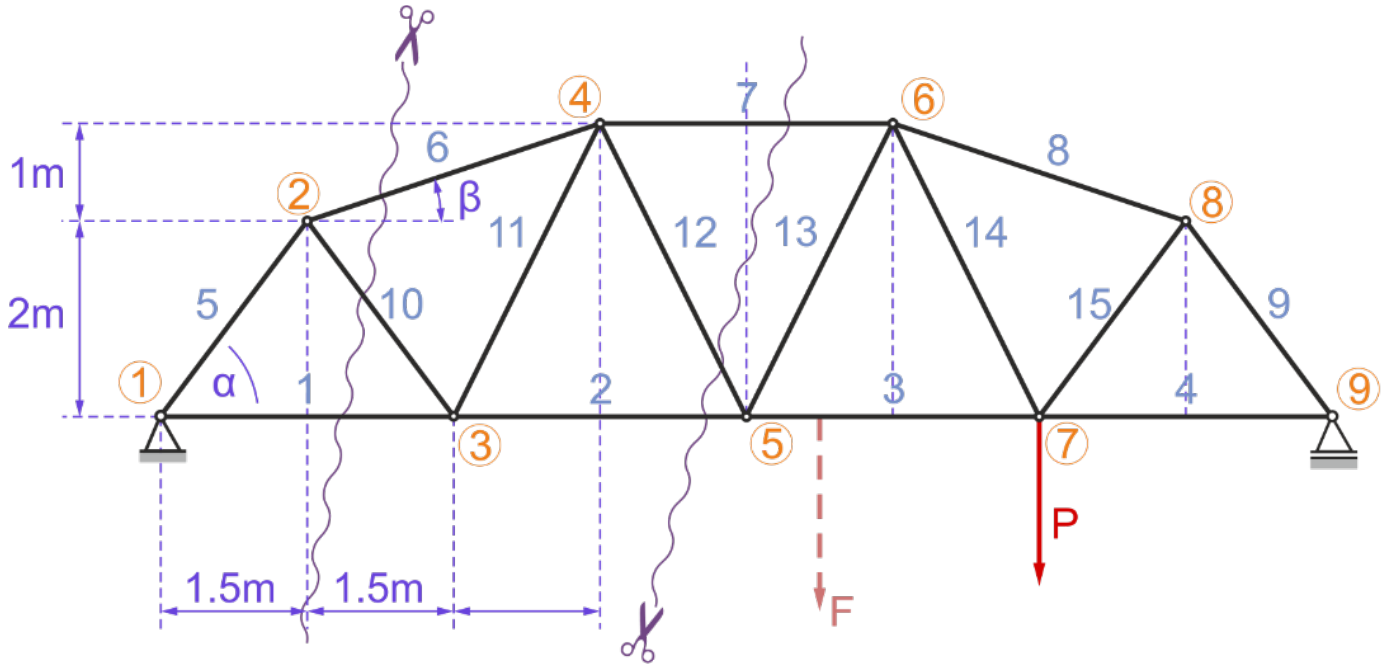
$$-S_5\cos\alpha + S_{10}\cos\alpha + S_6\cos\beta = 0$$
$$-S_5\sin\alpha - S_{10}\sin\alpha + S_6\sin\beta = 0$$

$$\boxed{S_6 = -0.3162P,\ \ S_{10} = 0.1875P}$$

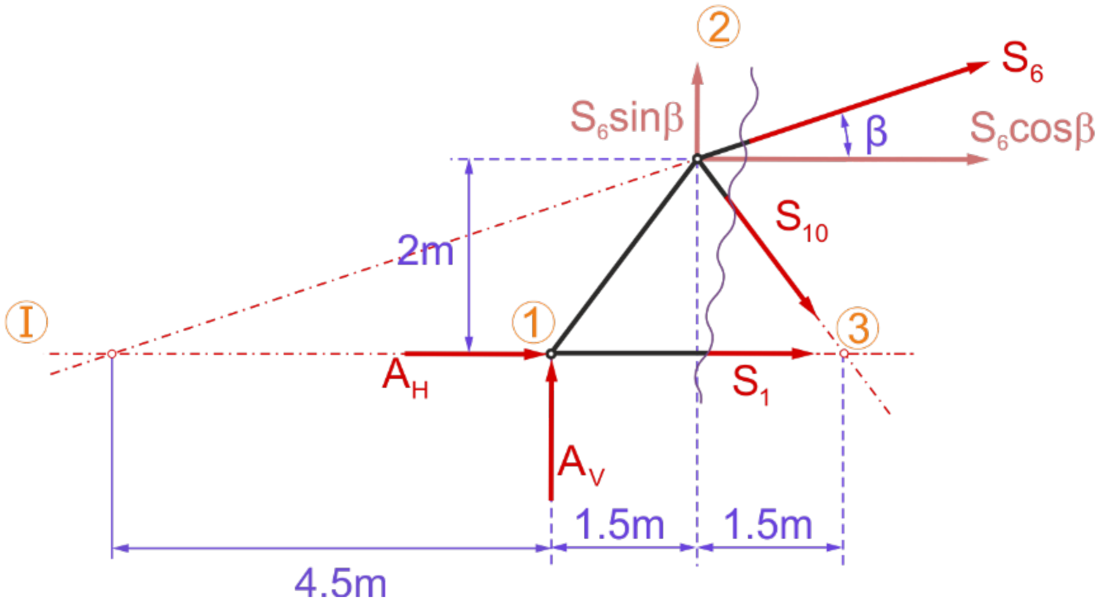
Druckstab Zugstab

Rittersches Schnittverfahren

Man schneidet so, dass nicht mehr als 3 Stäbe mit unbekannten Stabkräften geschnitten werden. Diese dürfen keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Allerdings dürfen beliebig viele bekannte Stäbe geschnitten werden.



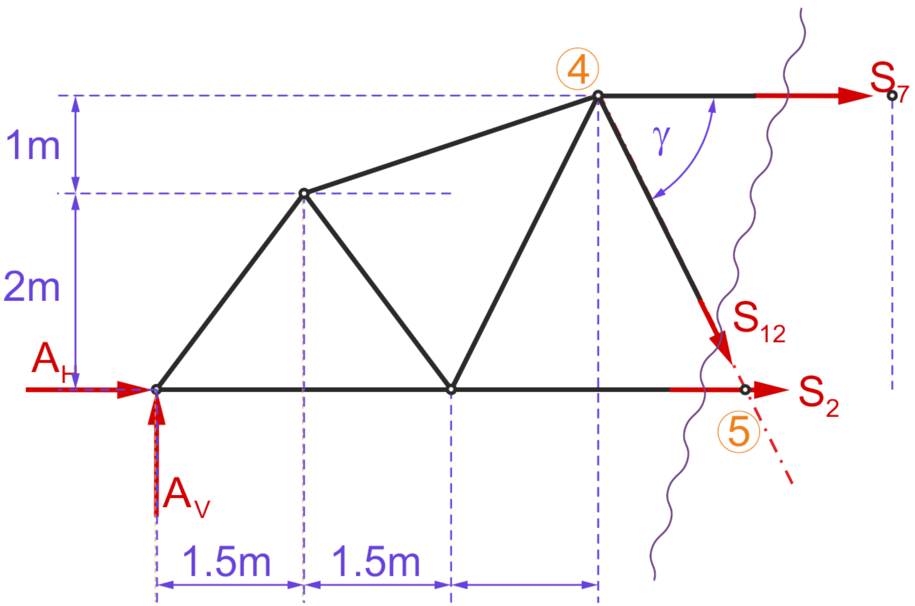
Rittersches Schnittverfahren



$$\sum M_{i,3} = 0: -A_V \cdot 3 - S_6 \cos\beta \cdot 2 - S_6 \sin\beta \cdot 1.5 = 0 \qquad \Rightarrow S_6 = -0.3162P$$

$$\sum M_{i,2} = 0: -A_v \cdot 1.5 + A_H \cdot 2 + S_1 \cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow S_1 = 0.1875P$$

$$\sum M_{i,I} = 0: -2S_{10}\cos\alpha - 6S_{10}\sin\alpha + 4.5A_V = 0 \qquad \Rightarrow S_{10} = 0.1875P$$



$$\sum M_{i,4} = 0: \quad S_2 \cdot 3 - A_V \cdot 4.5 + A_H \cdot 3 = 0 \qquad \Rightarrow S_2 = 0.375P$$

$$\sum M_{i,5} = 0: \quad -S_7 \cdot 3 - A_V \cdot 6 = 0 \qquad \Rightarrow S_7 = -0.5P$$

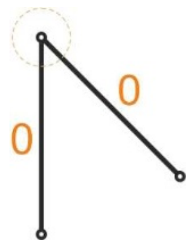
$$\sum F_{i,V} = 0: \quad A_V - S_{12}\sin\gamma = 0 \qquad \Rightarrow S_{12} = 0.2795P$$

3.3 Nullstäbe

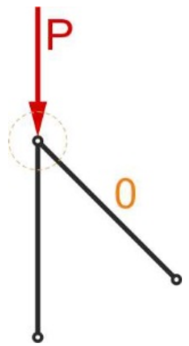
sind Stäbe, die bei der gegebenen äußeren Belastung keine Kräfte übertragen. Sie könnten daher auch aus dem Fachwerk entfernt werden, ohne dessen Tragfähigkeit zu gefährden.

Mithilfe der Nullstabregeln können Nullstäbe a priori erkannt werden:

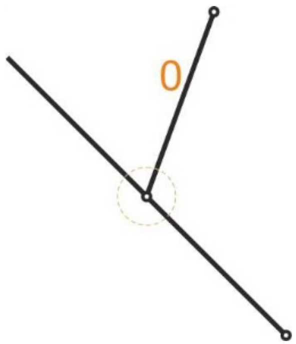
Nullstabregel 1:



Nullstabregel 2:

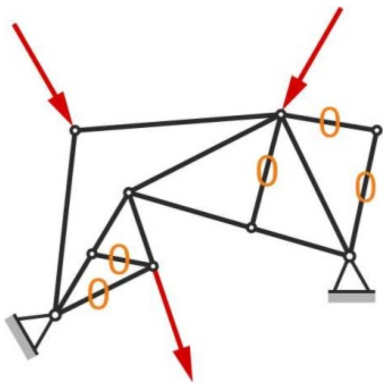


Nullstabregel 3:



Jeder Knoten muss für sich betrachtet im Gleichgewicht sein. Das ist für die markierten Knoten nur dann möglich, wenn die jeweils mit „0“ markierten Stäbe Nullstäbe sind.

Beispiel

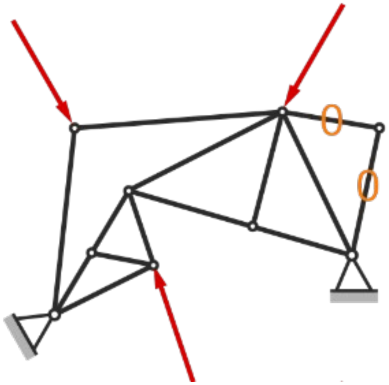


Damit überhaupt Nullstabregeln anwendbar sein, muss das Fachwerk statisch bestimmt sein. Im vorliegenden Fall gilt:

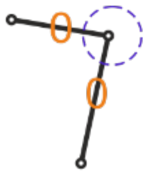
$z = 4$
$s = 14$
$k = 9$

$2 \cdot 9 = 14 + 4$, also statisch bestimmt.

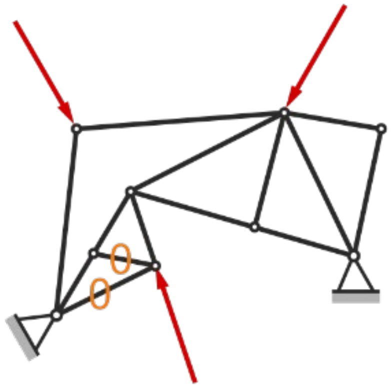
Bestimmen der Nullstäbe:

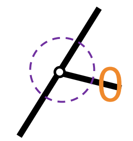


Es liegt ein unbelasteter Zweischlag vor (Nullstabregel 1)

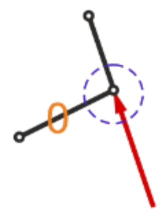


Beispiel

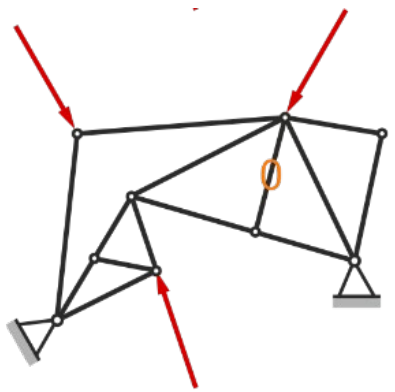


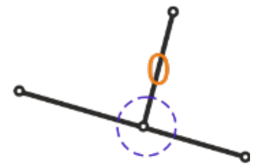


Ein Stab auf der linken Seite mündet in ein unbelastetes Gelenk, an dem zwei gleich ausgerichtete Stäbe angreifen (T-Kreuzung). → Nullstabregel 3



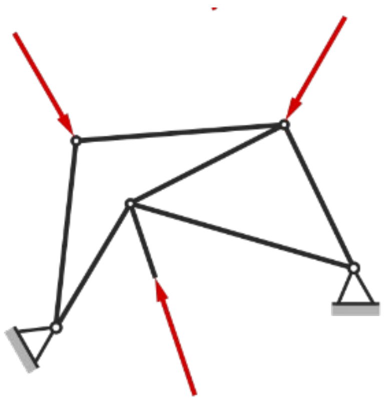
Dadurch wird ein weiterer Nullstab sichtbar. Eine Kraft wirkt in Richtung einer der Stäbe in einem Gelenk, das zwei Stäbe verbindet. → Nullstabregel 2





Ein Stab auf der rechten Seite mündet in ein unbelastetes Gelenk, an dem zwei gleich ausgerichtete Stäbe angreifen (T-Kreuzung). → Nullstabregel 3

Beispiel



Zurück bleibt das Fachwerk mit ausschließlich belasteten Stäben

Ergänzung

Bei statisch bestimmten Fachwerken können die Stabkräfte auch mithilfe eines grafischen Verfahrens bestimmt werden: Cremonaplan (nach Luigi Cremona 1830 – 1903).

http://de.wikipedia.org/wiki/Cremonaplan

Weitere Beispiele zu den Nullstabregeln