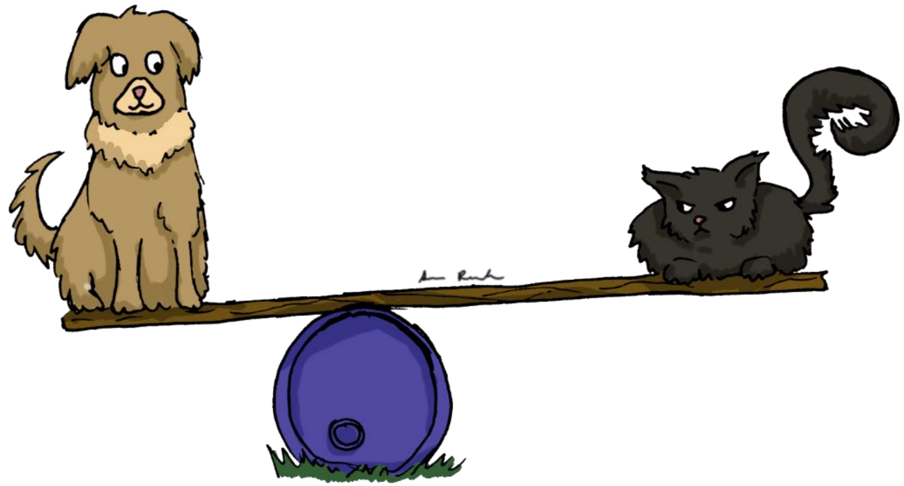
2. Das Gleichgewicht



2.1 Die Gleichgewichtsbedingungen

Gleichgewicht = Zustand andauernder Ruhe

Gleichgewicht erfordert das Erfüllen der Gleichgewichtsbedingungen (Glgw.-bed.):

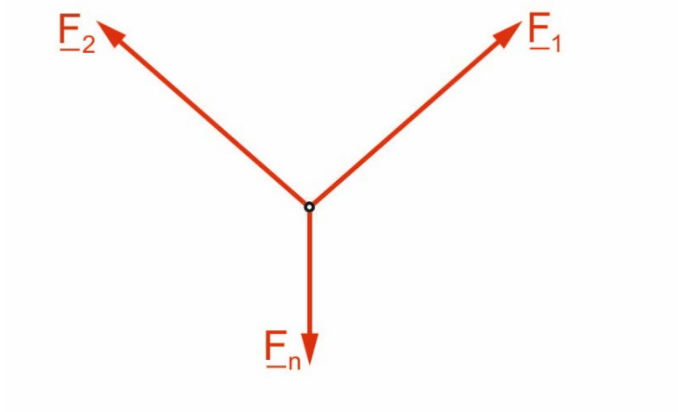
$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \underline{0}$$

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \underline{0}$$

Die Glgw.-bed. müssen unabhängig von der Wahl des Reduktionspunkts erfüllt sein.

Das Momentengleichgewicht beinhaltet auch die Momentenwirkung von Kräftepaaren, die ja auch als Einzelmomente interpretiert werden können.

Spezialfälle: Zentrales Kraftsystem (eben oder räumlich), die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden einander in einem Punkt.

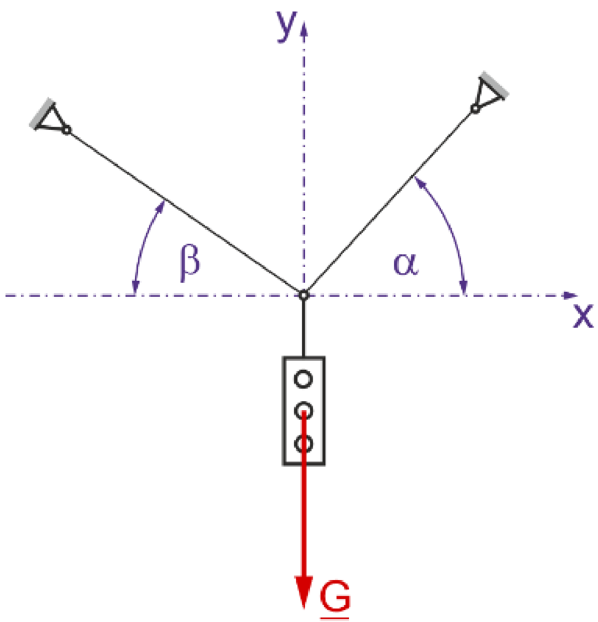


Gleichgewichtbedingung:

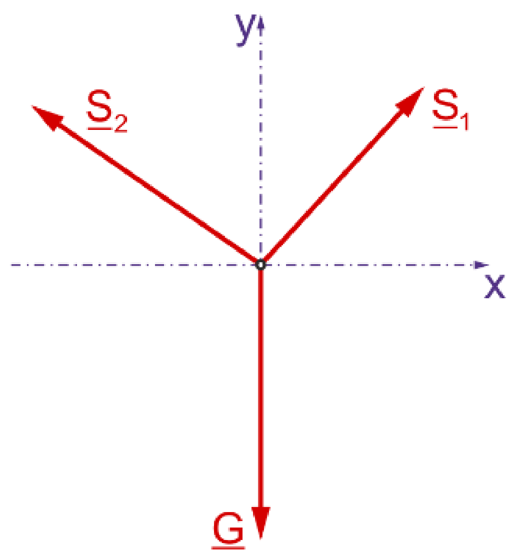
$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0}$$

Ist im zentralen Kraftsystem $\underline{R} = \underline{0}$, dann ist $\underline{M} = \underline{0}$ automatisch auch erfüllt.

Beispiel: Eine Verkehrsampel hängt an zwei Seilen



Freikörperbild



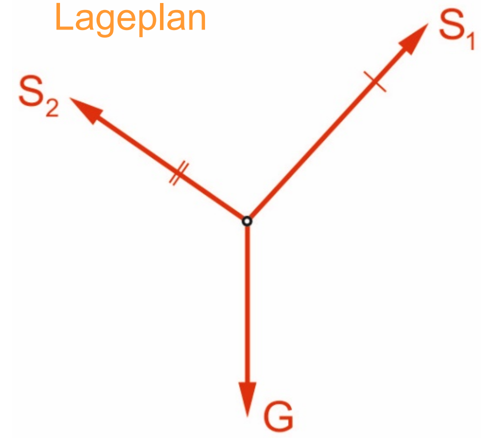
Geg.: α, β, G

Ges.: Seilkräfte S_1, S_2

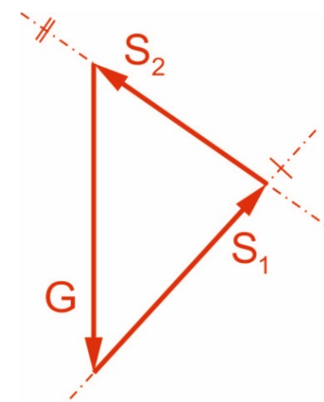
$\underline{G}$ ………... eingeprägte Kraft
$\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$ ……. Bedingungskräfte

Grafische Lösung:

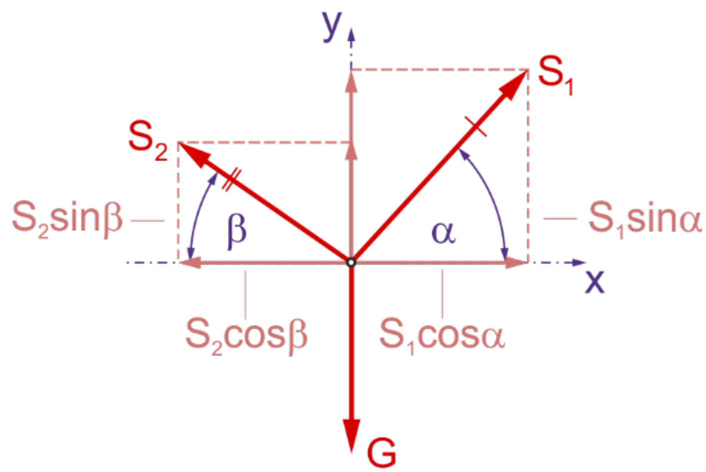
Lageplan



Kräfteplan



Rechnerische Lösung:



$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F_i} = \underline{0} = \begin{cases} \sum F_{ix} = 0: \quad S_1\cos\alpha - S_2\cos\beta = 0 \quad | \cdot \sin\beta \\ \sum F_{iy} = 0: \quad S_1\sin\alpha + S_2\sin\beta - G = 0 \quad | \cdot \cos\beta \end{cases}$$

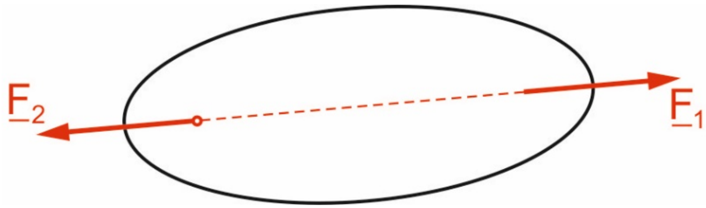
$$S_1\underbrace{(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)} = G\cos\beta$$

$$S_1 = G\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad S_2 = G\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad [\mathrm{N}]$$

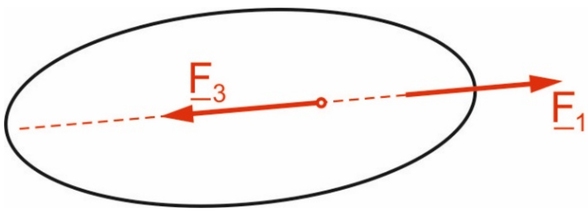
Kraftsystem aus 2 Kräften:

2 Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- sie in einer Wirkungslinie liegen und
- sie gegengleich groß sind.



$$\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$$

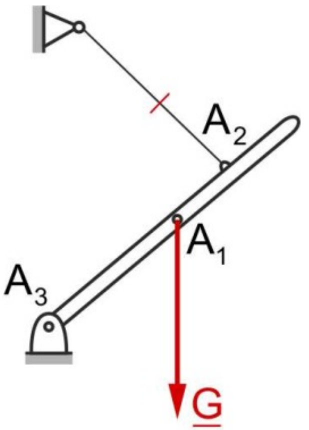


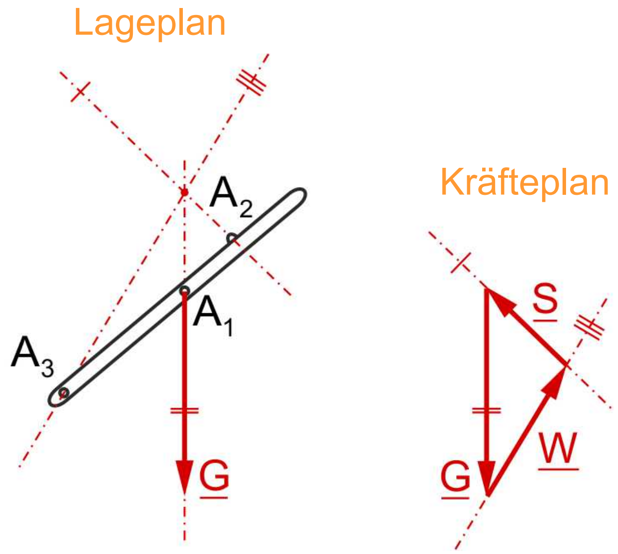
$$\underline{F}_3 = \underline{F}_2$$

Kraftsystem aus 3 Kräften:

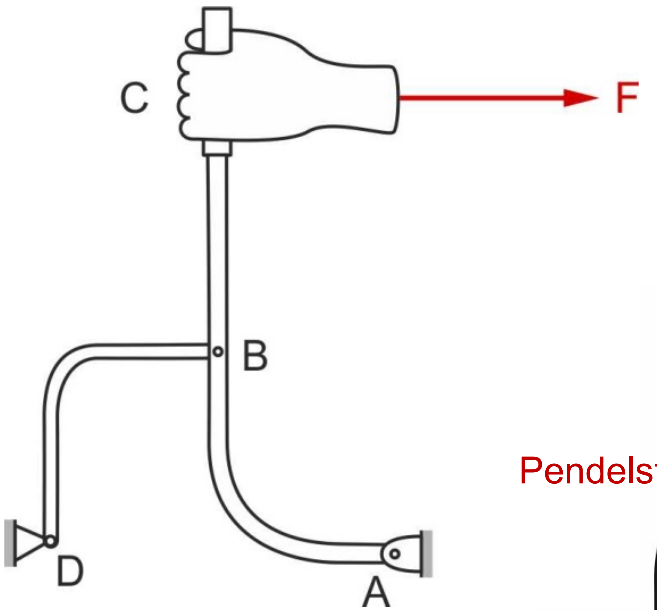
3 Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- sie in einer Ebene liegen und
- ihre Wirkungslinien einen gemeinsamen Schnittpunkt haben und
- ihre Vektorsumme = 0 ist.





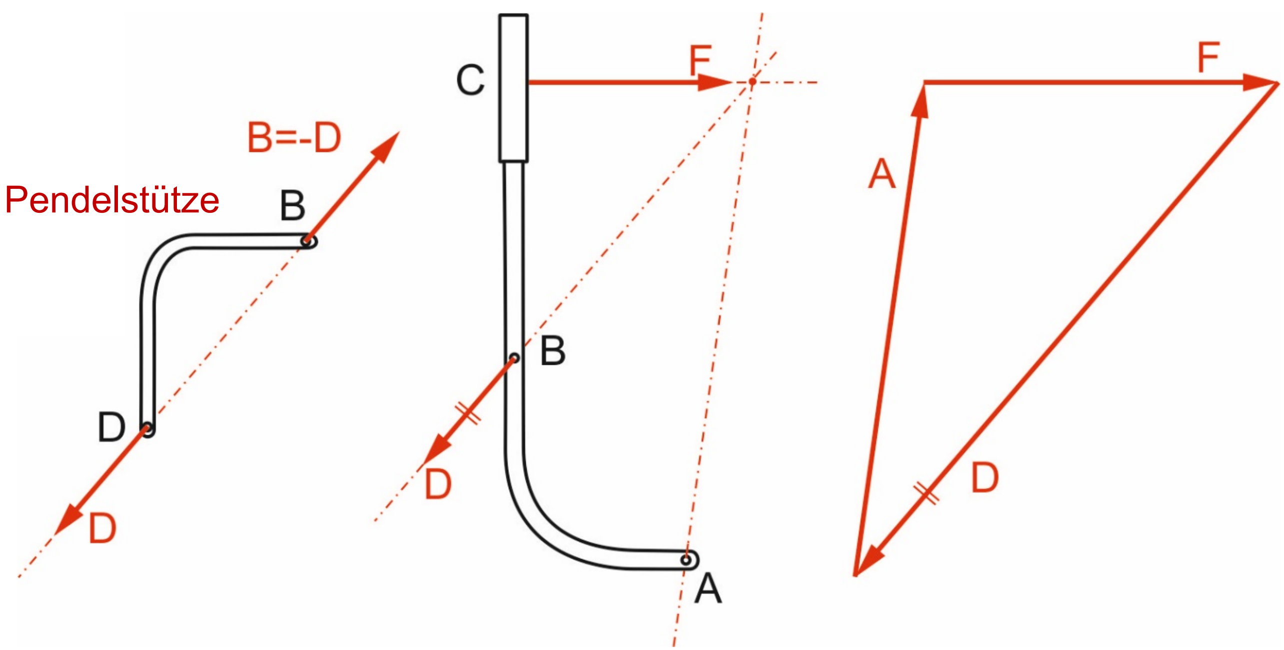
Beispiel: Zusammengesetztes System



Zerlegen in Teilsysteme

Lageplan

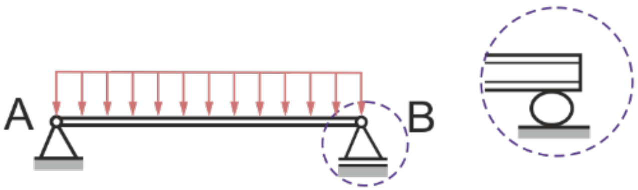
Kräfteplan



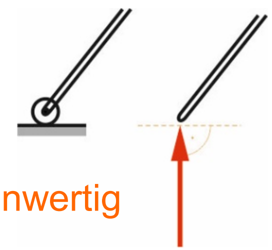
Freikörperbild

Es müssen alle Kräfte und Momente eingezeichnet werden, welche die Umgebung auf den Körper ausübt.

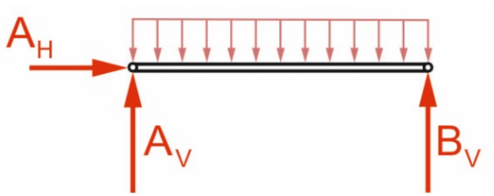
Lagerreaktionen für ebene Probleme



Festlager Loslager



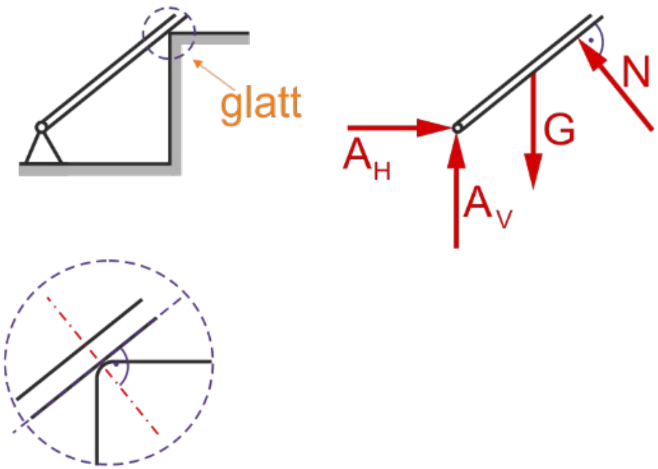
einwertig



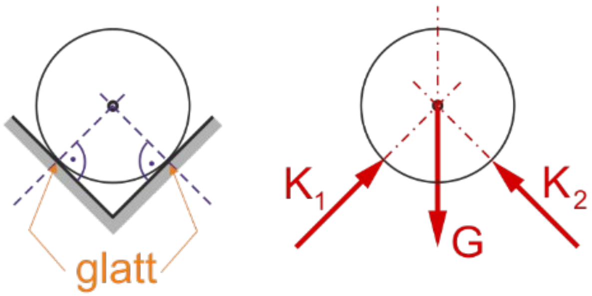
zweiwertig einwertig

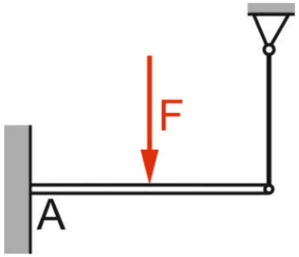
Die Rolle entspricht einem reibungsfreien Kontakt

A_H .... horizontale Komponente der Auflagerkraft
A_V .... vertikale Komponente der Auflagerkraft

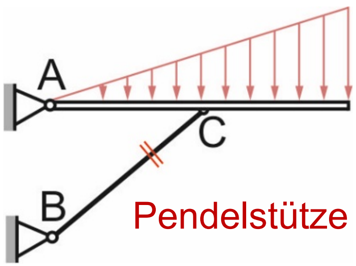


Bei Reibungsfreiheit steht die Kontaktkraft immer normal auf die Berührfläche !

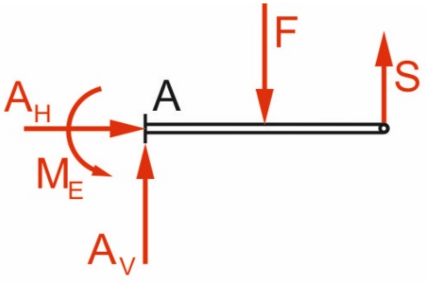




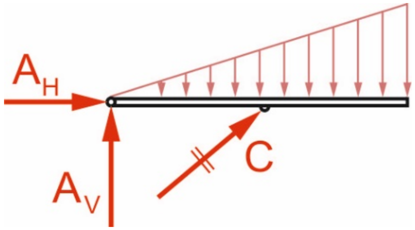
Einspannung



Pendelstütze



dreiwertig

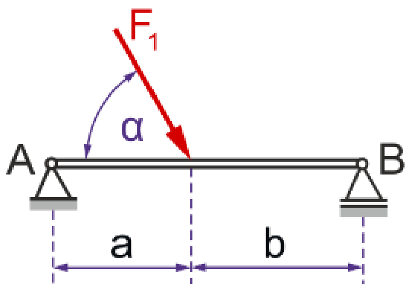


M_E .... Einspannmoment

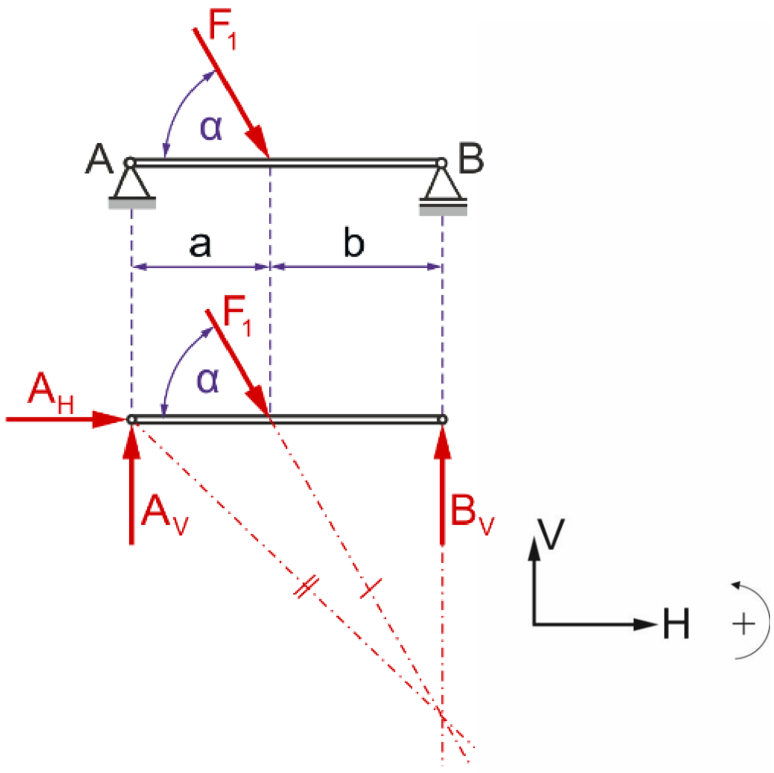
Beispiel: Träger, durch eine schräge Einzelkraft belastet

Geg.: F_1, α, a, b

Ges.: Auflagerkräfte



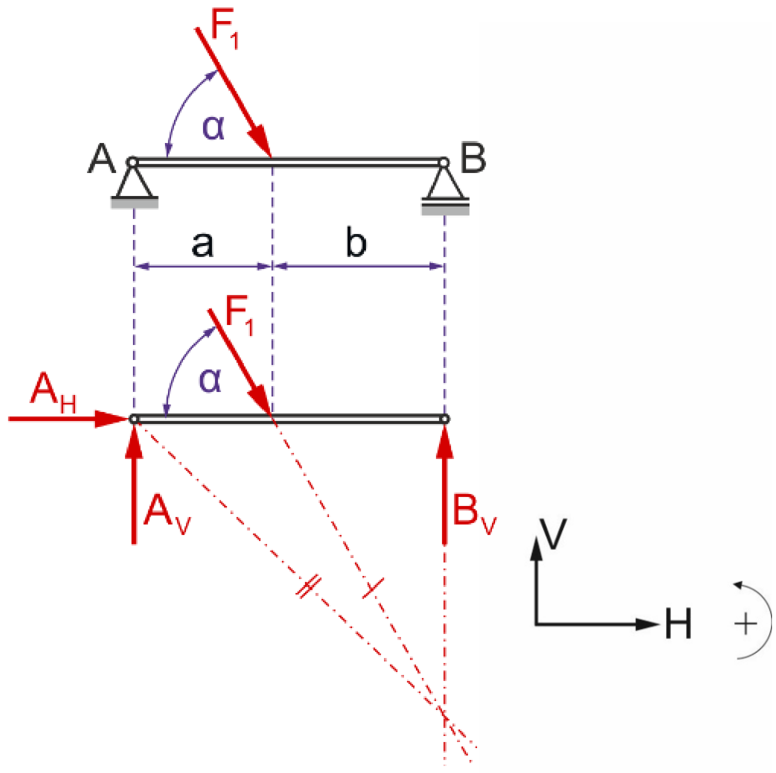
Beispiel: Träger, durch eine schräge Einzelkraft belastet



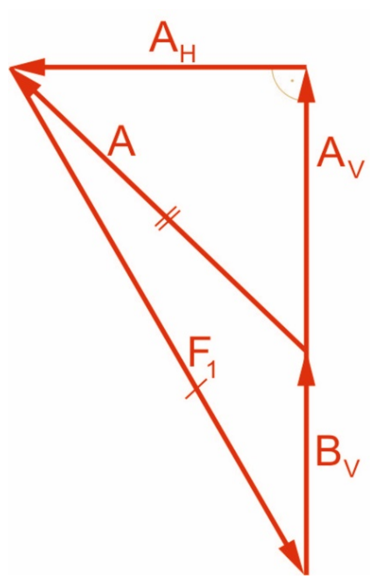
F_1 ist eine eingeprägte Kraft, d.h. eine vorgegebene Kraft. Deren Orientierung ist somit ebenfalls vorgegeben und darf im Freikörperbild nicht verändert werden.

A_H, A_V und B_V sind Bedingungskräfte (Reaktionskräfte). Deren Orientierung darf im Freikörperbild willkürlich festgelegt werden. Das Lösungsverfahren (grafisch oder rechnerisch) ergibt dann die richtige Orientierung.

Beispiel: Träger, durch eine schräge Einzelkraft belastet



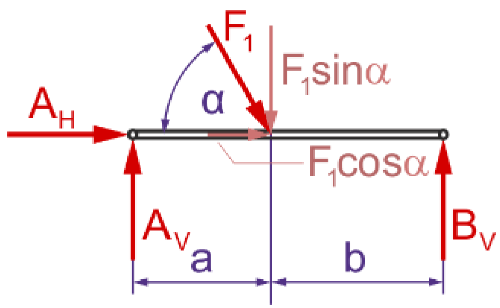
grafische Lösung



2.2 Freikörperbild

geg.: a, b, α, F_1

ges.: Auflagerreaktionen A_H, A_V, B_V



rechnerische Lösung

$$\underline{R} = \sum \underline{F_i} = \underline{0}: \begin{cases} \sum F_{iH} = 0: \quad A_H + F_1\cos\alpha = 0 \\ \sum F_{iV} = 0: \quad A_V + B_V - F_1\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\underline{M} = \underline{0}: \qquad \sum M_{iA} = 0: \quad B_V(a+b) - F_1\sin\alpha \cdot a = 0$$

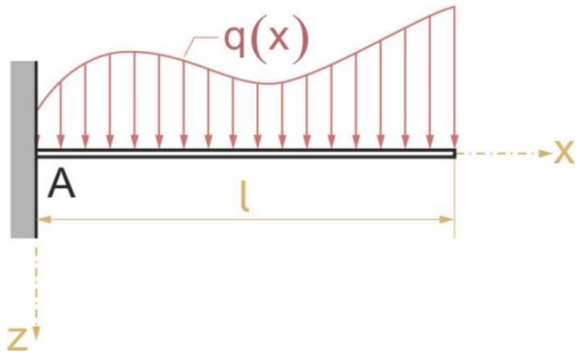
beliebiger Bezugspunkt, z.B. A

Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} B_V &= F_1 \frac{a}{a+b}\sin\alpha \\ A_H &= -F_1\cos\alpha \\ A_V &= F_1 \frac{b}{a+b}\sin\alpha \end{aligned}}$$

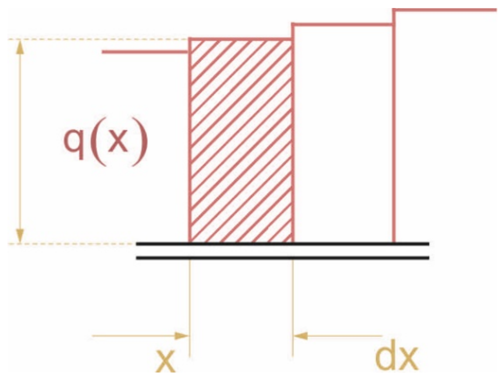
Negatives Vorzeichen:
in Wirklichkeit wird A_H von rechts nach links wirken.

Beispiel: Kragbalken



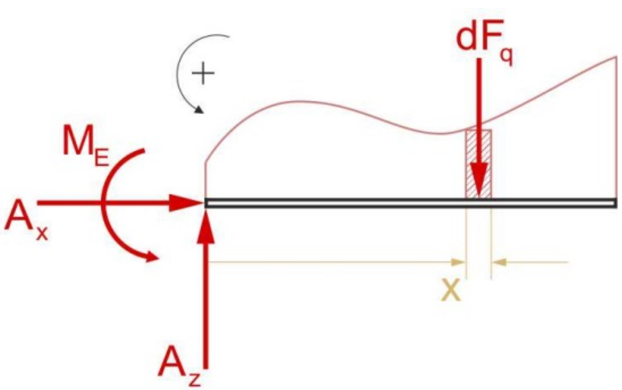
geg.: $q(x), l$

ges.: Auflagerreaktion



$$dF_q = q(x)dx$$

Freikörperbild



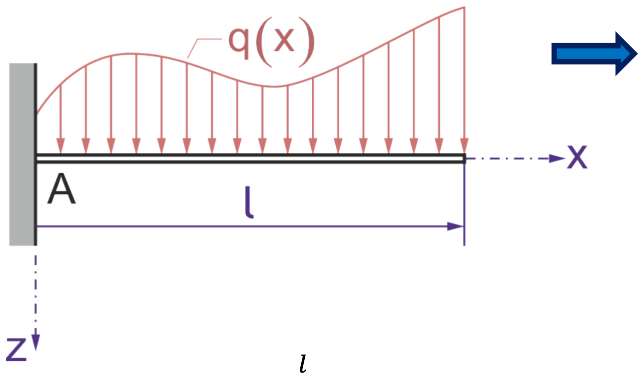
$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x = 0$$

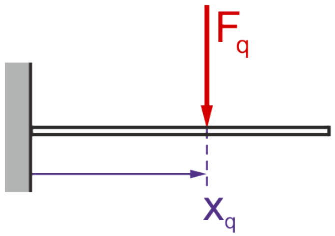
$$\sum F_{iz} = 0: \quad -A_z + \int_0^l q(x)dx = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = \int_0^l q(x)dx$$

$$\sum M_{i,A} = 0: \quad M_E - \int_0^l xq(x)dx = 0 \quad \rightarrow \quad M_E = \int_0^l xq(x)dx$$

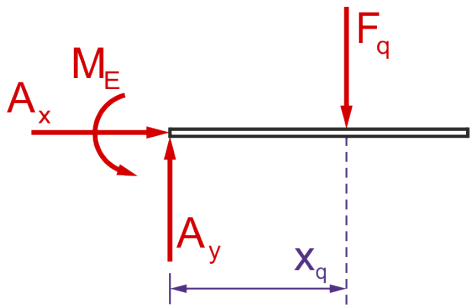
2.2 Freikörperbild

Für Gleichgewichtsüberlegungen kann man die Streckenlast durch eine Einzellast an der Position x_q äquivalent ersetzen.





Freikörperbild



$$F_q = \int_0^l q(x)dx$$ … Fläche unter $q(x)$

$$M_E = \int_0^l xq(x)dx$$

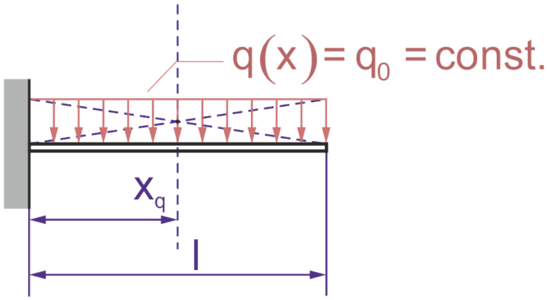
$$x_q = \frac{M_E}{F_q} \Rightarrow \boxed{x_q = \frac{\int_0^l xq(x)dx}{\int_0^l q(x)dx}}$$ … Flächen-SP

$$A_x = 0$$

$$A_y = F_q$$

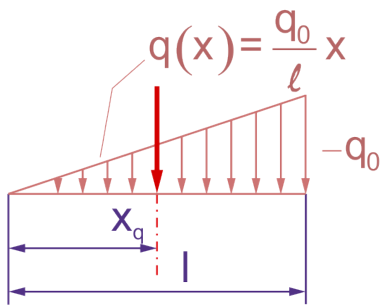
$$M_E = F_q\, x_q$$

Spezialfall: Gleichlast



$$F_q = q_0 l, \quad x_q = \frac{1}{2} l$$

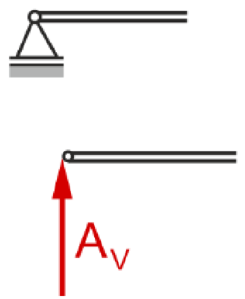
Spezialfall: Dreieckslast



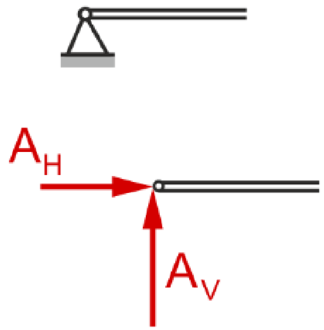
$$F_q = \frac{1}{2} q_0 l, \quad x_q = \frac{2}{3} l$$

2.2 Freikörperbild

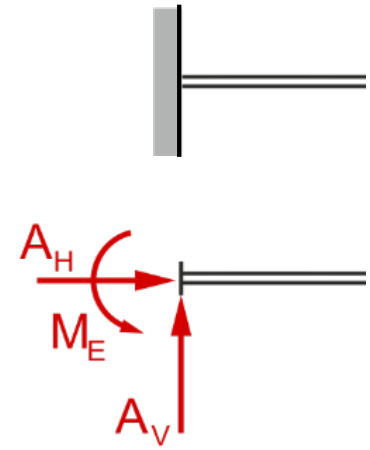
Einige Lagerarten:



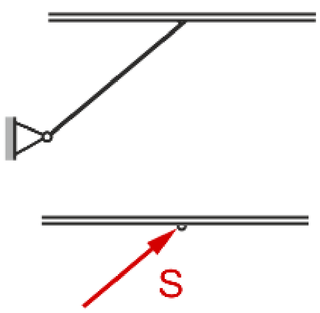
Loslager:
1 unbekannte Kraftkomponente



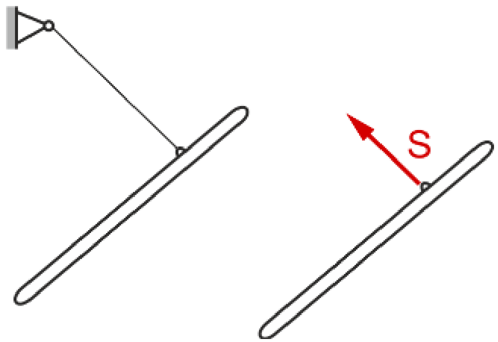
Festlager:
2 unbekannte Kraftkomponenten



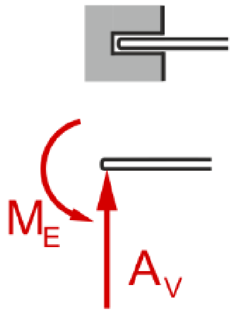
Feste Einspannung:
2 unbekannte Kraftkomponenten
1 unbekannte Momentenkomp.



Lagerung durch Stab:
1 unbekannte Stabkraft
(Druck- oder Zugkraft)



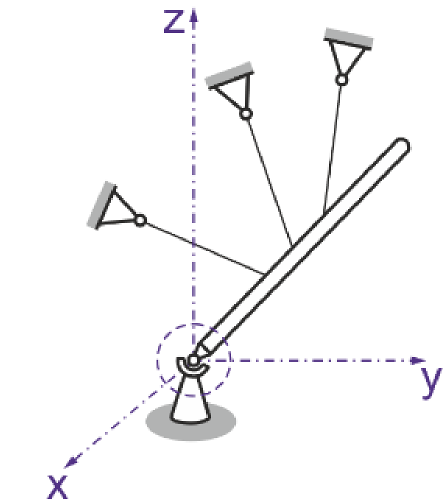
Lagerung durch Seil:
1 unbekannte Seilkraft
(Zugkraft)

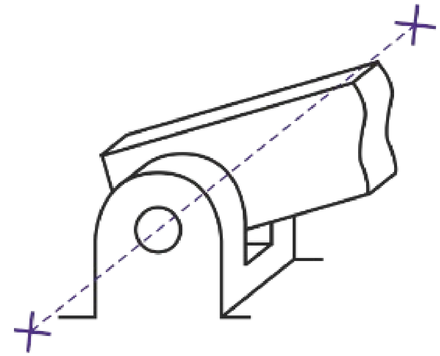


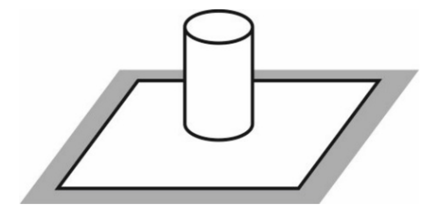
Feste Führung:
1 unbekannte Kraftkomponente
1 unbekannte Momentenkomp.

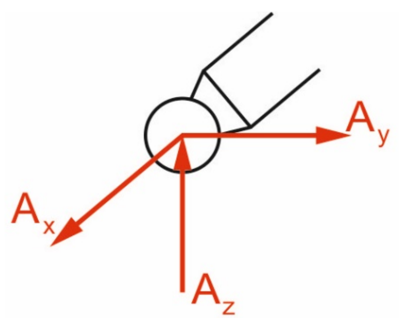
2.2 Freikörperbild

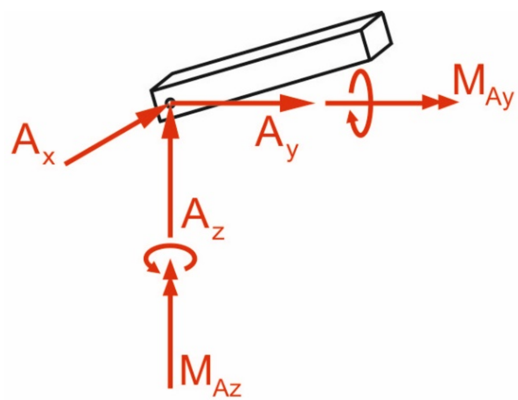
Räumliche Probleme:

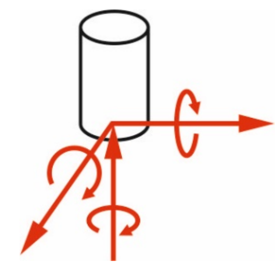










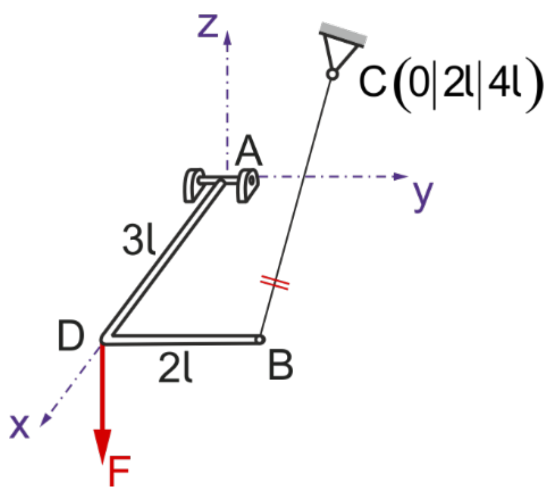


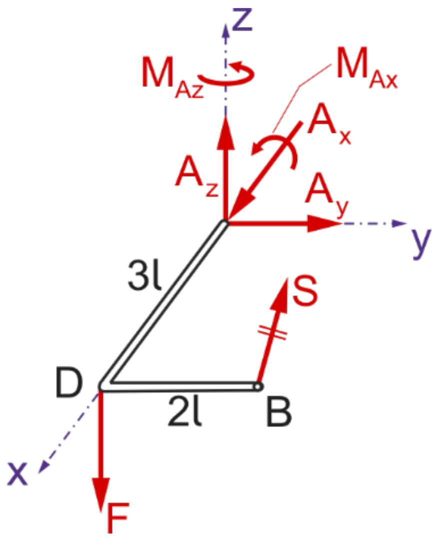
Kugelgelenk:
3 unbekannte Kraftkomponenten

Scharniergelenk:
3 unbekannte Kraftkomponenten
2 unbekannte Momentenkomp.

Einspannung:
3 unbekannte Kraftkomponenten
3 unbekannte Momentenkomp.

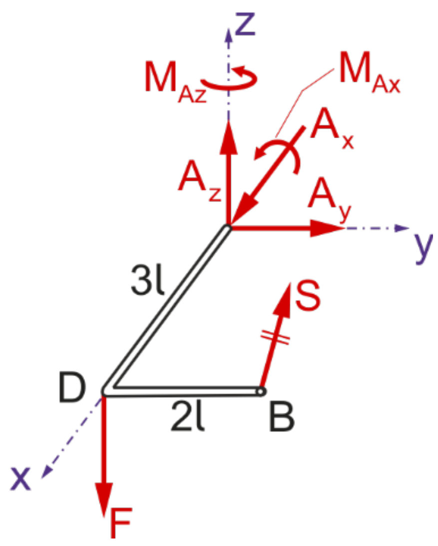
Beispiel:





Geg.: l, F

Ges.: Auflagerreaktionen



$$\sum \underline{F}_i = \underline{0}: \quad \underline{S} + \underline{A} + \underline{F} = \underline{0}$$

$$\sum \underline{M}_{iA} = \underline{0}: \quad \underline{M}_A + \underline{r}_{BA} \times \underline{S} + \underline{r}_{DA} \times \underline{F} = \underline{0}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix} \quad \underline{S} = S\underline{n}_{CB} = S\frac{\underline{r}_{CB}}{|\underline{r}_{CB}|}$$

$$\underline{r}_{CB} = l\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - l\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = l\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \underline{S} = S\underline{n}_{CB} = S\frac{\underline{r}_{CB}}{|\underline{r}_{CB}|} = \frac{S}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{BA} = l\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{r}_{DA} = l\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{M}_A = \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ 0 \\ M_{Az} \end{bmatrix}$$

Für den Momentenbeitrag von S hätte man statt $\underline{r}_{BA}$ auch $\underline{r}_{CA}$ nehmen können:

$$\underline{r}_{CA} \times \underline{S} = \frac{Sl}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{Sl}{5}\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix} \quad = \quad \underline{r}_{BA} \times \underline{S} = \frac{Sl}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{Sl}{5}\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

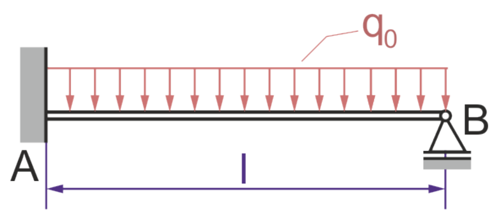
$$\sum \underline{F}_i = \underline{0}: \quad \frac{S}{5}\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-F\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\sum \underline{M}_{iA} = \underline{0}: \quad \begin{bmatrix}M_{Ax}\\0\\M_{Az}\end{bmatrix} + l\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix} \times \frac{S}{5}\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix} + l\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\-F\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

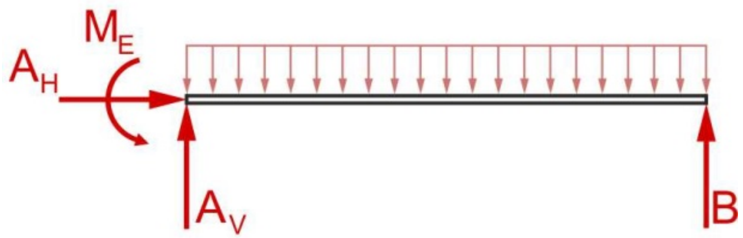
$$\begin{aligned}
-\tfrac{3}{5}S + A_x &= 0 \quad (1) \quad \rightarrow \quad \underline{A_x = \tfrac{3}{4}F}\\
A_y &= 0 \quad (2) \quad \rightarrow \quad \underline{A_y = 0}\\
\tfrac{4}{5}S + A_z - F &= 0 \quad (3) \quad \rightarrow \quad \underline{A_z = 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Ax} + \tfrac{8}{5}Sl &= 0 \quad (4) \quad \rightarrow \quad \underline{M_{Ax} = -2Fl}\\
-\tfrac{12}{5}Sl + 3Fl &= 0 \quad (5) \quad \rightarrow \quad \underline{S = \tfrac{5}{4}F}\\
M_{Az} + \tfrac{6}{5}Sl &= 0 \quad (6) \quad \rightarrow \quad \underline{M_{Az} = -\tfrac{3}{2}Fl}
\end{aligned}$$

Beispiel:



Freikörperbild



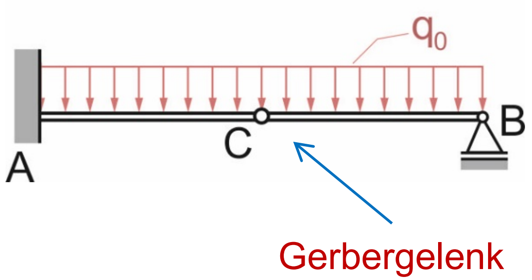
4 Unbekannte, aber nur 3 Gleichungen aus den Glgw.-bed.

Ist die Anzahl der Unbekannten größer als die Anzahl der Gleichungen, so ist das System statisch unbestimmt.

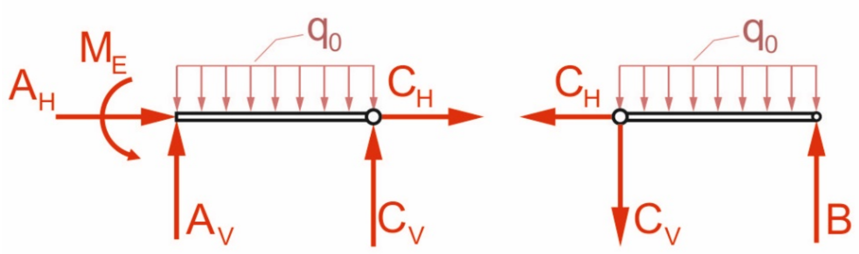
Statisch unbestimmte Probleme erfordern es, auf die Deformationen des Systems einzugehen, siehe Festigkeitslehre.

Man kann obigen Träger statisch bestimmt machen, indem man ein zusätzliches Gelenk einbaut.

Man erhält einen Gerberträger



Freikörperbild

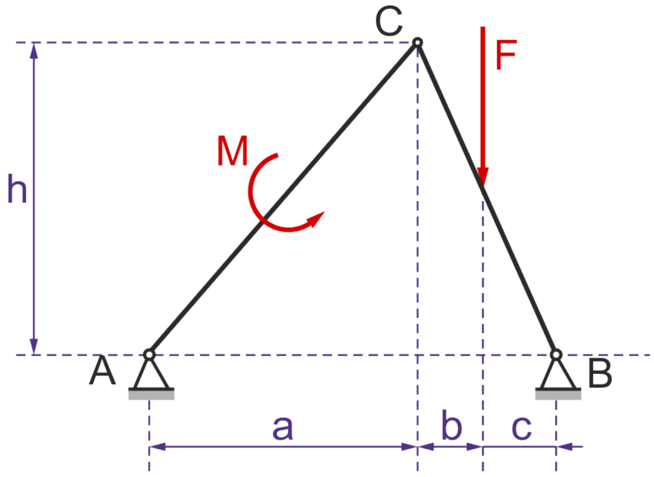


5 Unbekannte
3 Gleichungen

1 weitere Unbekannte
3 Gleichungen

Für jedes der beiden Teilsysteme lassen sich nun jeweils 3 Gleichungen für die insgesamt 6 Unbekannten anschreiben. Das System ist somit statisch bestimmt.

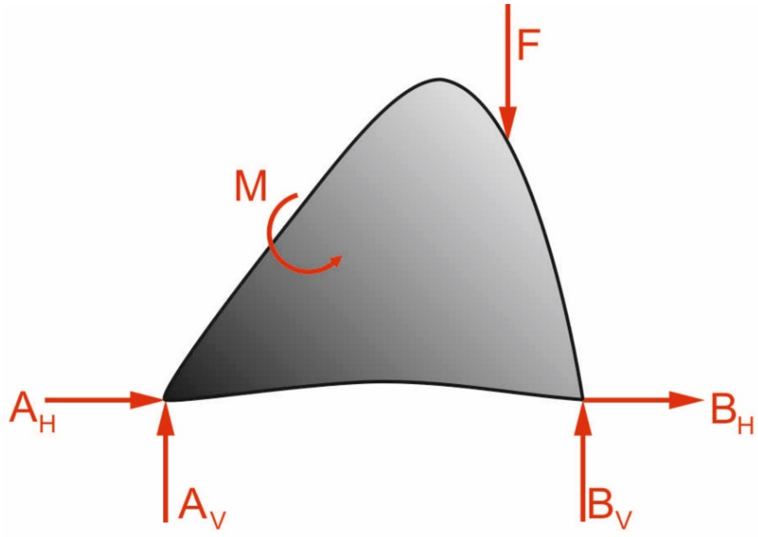
2.3 Dreigelenkbogen



geg.: M, F, a, b, c, h

ges.: Auflagerkräfte in A und B

Unabhängig von der inneren Struktur muss das Gleichgewicht auch für das Gesamtsystem gelten:



$$\sum F_{iH} = 0: A_H + B_H = 0 \quad (1)$$

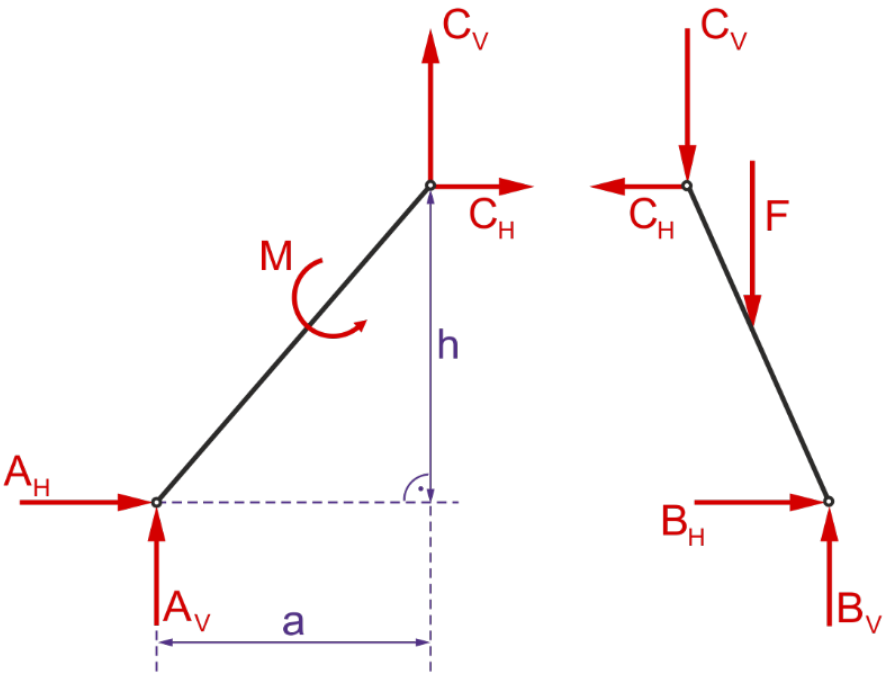
$$\sum F_{iV} = 0: A_V + B_V - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{i,A} = 0: B_V(a+b+c) - F(a+b) + M = 0 \quad (3)$$

4 Unbekannte A_H, A_V, B_H, B_V
3 Gleichungen

aufgrund des Gelenks in C trotzdem statisch bestimmt

Eine vierte Gleichung lässt sich in effizienter Weise finden, wenn man ein weiteres Momentenglgw. für nur einen Teil (z.B. hier den linken) um den Gelenkpunkt C anschreibt:



$$\sum F_{iH} = 0: A_H + B_H = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iV} = 0: A_V + B_V - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{i,A} = 0: B_V(a + b + c) - F(a + b) + M = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{i,C} = 0: A_H h - A_V a + M = 0 \quad (4)$$

Will man auch die Gelenkskraft explizit wissen, so muss man noch zusätzliche 2 Gleichungen aus dem Kräfteglgw. an einem der beiden Teile anschreiben.