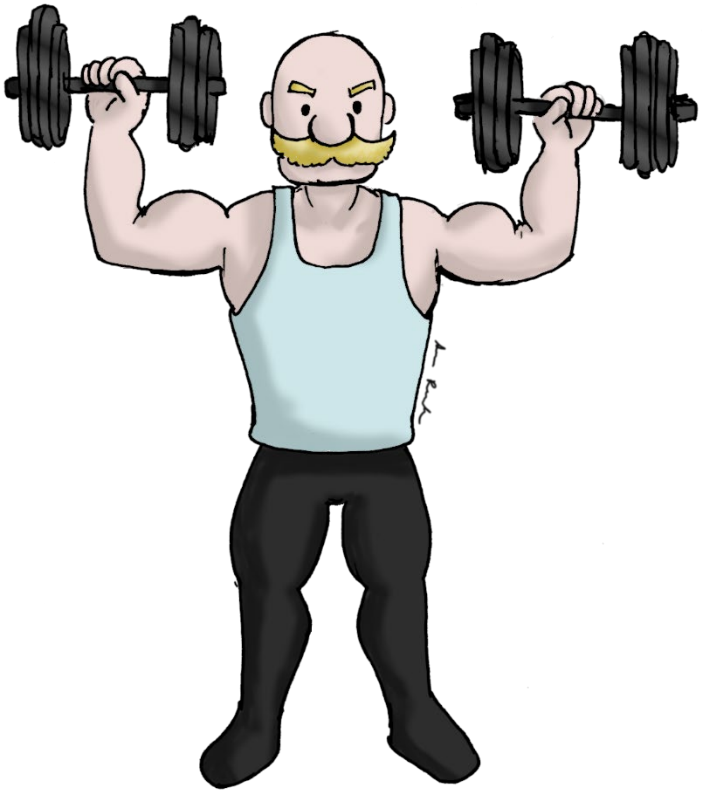
1. Der Kraftbegriff

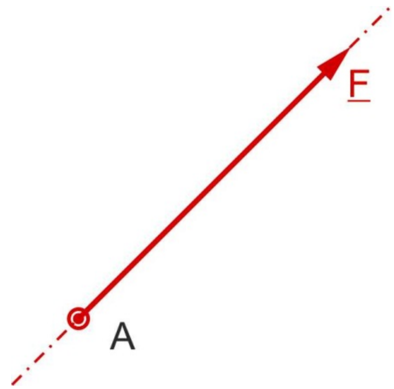


1.1 Der Kraftvektor

Eine Kraft ist ein Vektor, charakterisiert durch
Größe, Richtung und Orientierung

Bezeichung allgemein: $\underline{F}$ (auch $\vec{F}$, $\vec{F}$, ***F***.....)

Typische Kräfte: Gewichtskraft $\underline{G}$, Seilkraft $\underline{S}$, Kontaktkraft $\underline{K}$....



Kräfte bewirken:

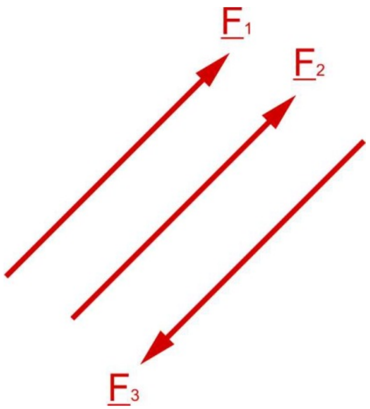
- Muskelempfindungen
- Verformungen fester Körper
- Beschleunigung von Körpern

Einheit der Kraft: Newton, 1 N = 1 kgms^{-2}
(früher: kilopond, 1 kp = 9,80665 N,
Normalfallbeschleunigung g_n = 9,80665 ms^{-2})

Andere Vektoren in der Mechanik:

Geschwindigkeit $\underline{v}$
Beschleunigung $\underline{a}$
Ortsvektor $\underline{r}$
.....

Vektoralgebra:

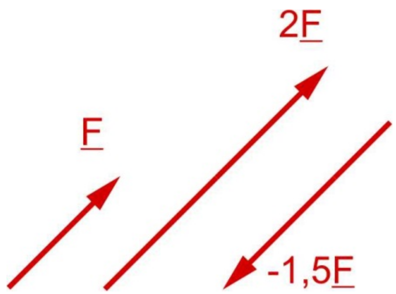


$\underline{F}_1 = \underline{F}_2$, wenn $\left|\underline{F}_1\right| = \left|\underline{F}_2\right|$ und $\underline{F}_1 \parallel \underline{F}_2$ und gleiche Orientierung,

der Angriffspunkt kann unterschiedlich sein

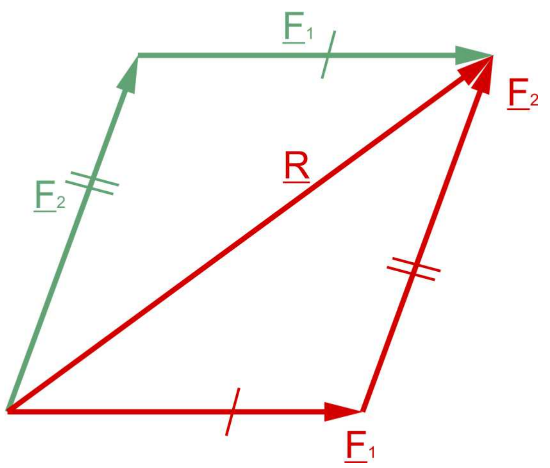
$\underline{F}_3 = -\underline{F}_1$, wenn $\left|\underline{F}_1\right| = \left|\underline{F}_3\right|$ und $\underline{F}_1 \parallel \underline{F}_2$ und entgegengesetzte Orientierung.

Multiplikation mit einem Skalar:



Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar verändert die Größe und ggf. die Orientierung des Vektors, die Richtung bleibt hingegen gleich.

Vektoraddition:



$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}_2 + \underline{F}_1$$

kommutativ!

aber $|\underline{R}| \leq |\underline{F}_1| + |\underline{F}_2|$

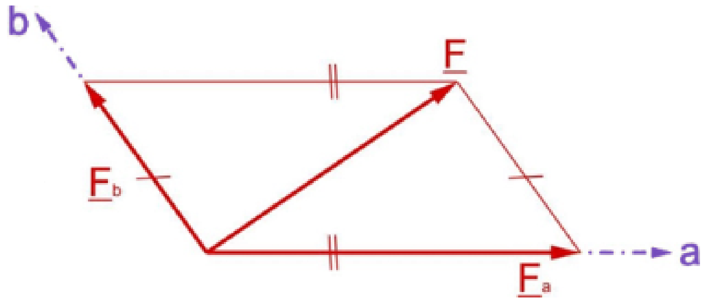
$$k(\underline{F}_1 + \underline{F}_2) = k\underline{F}_1 + k\underline{F}_2$$

distributiv!

Vektordifferenz:

$$\underline{D} = \underline{F}_1 - \underline{F}_2 = \underline{F}_1 + (-\underline{F}_2)$$

Zerlegung eines Vektors:

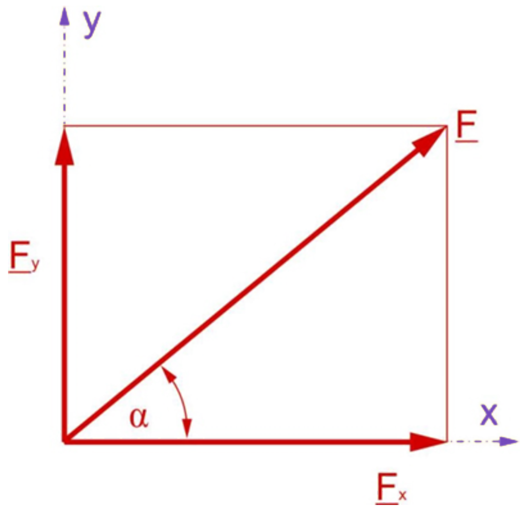


Zerlegung von $\underline{F}$ in Komponenten $\underline{F}_a$ und $\underline{F}_b$

Darstellungsmöglichkeiten von Vektoren:

Zerlegung eines Vektors in einem geeigneten Koordinatensystem

z.B. kartesisch, 2D:



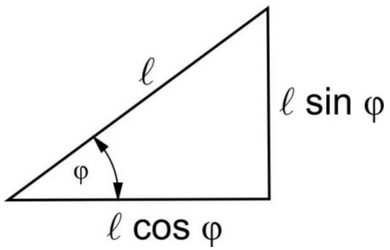
$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y = |\underline{F}_x|\underline{e}_x + |\underline{F}_y|\underline{e}_y = F_x\underline{e}_x + F_y\underline{e}_y$$

$\underline{e}_x, \underline{e}_y$ …. Einheitsvektoren (Richtungsanzeiger der Länge 1)

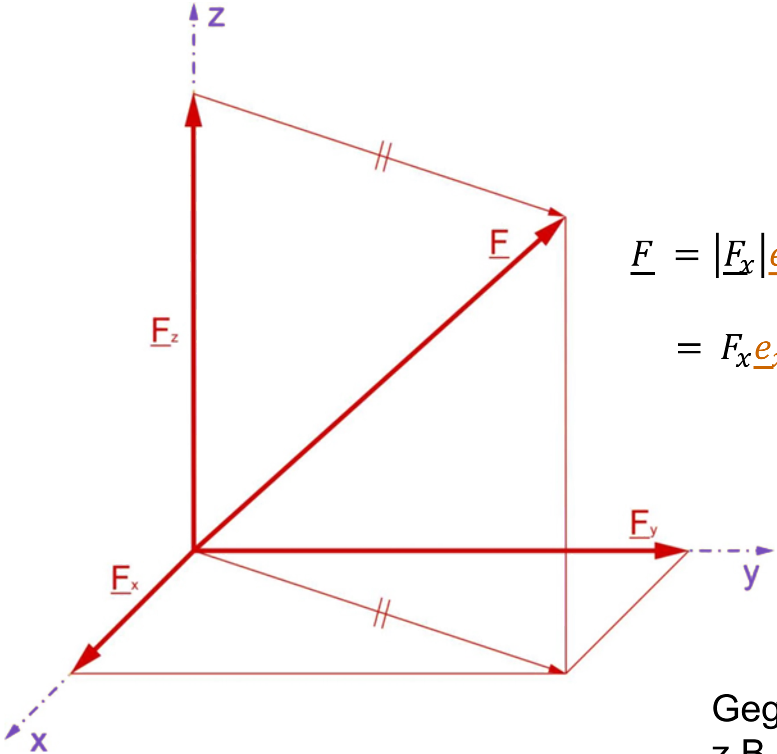
$$F_x = |\underline{F}| \cos\alpha$$

$$F_y = |\underline{F}| \sin\alpha$$

Merke:



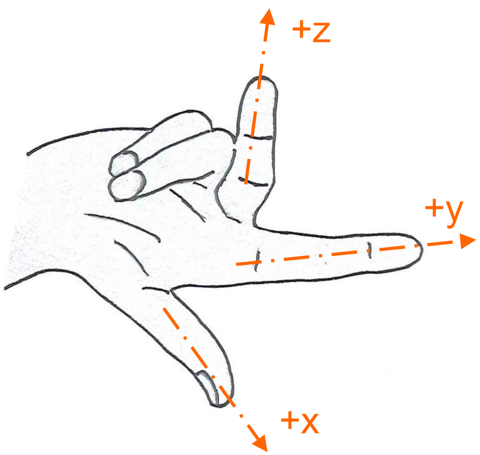
kartesisch, 3D:



$$\underline{F} = |\underline{F}_x|\underline{e}_x + |\underline{F}_y|\underline{e}_y + |\underline{F}_z|\underline{e}_z =$$

$$= F_x\underline{e}_x + F_y\underline{e}_y + F_z\underline{e}_z$$

rechtshändiges Koordinatensystem !



Gegebenenfalls sind andere Koordinatensysteme zielführend, z.B. Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten), natürliche Koordinaten (in der Kinematik) ….

Manchmal werden Vektoren in Spaltenform dargestellt:

z.B. Kraftvektor $\underline{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$, Geschwindigkeitsvektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, ….

Rechnerische Addition und Subtraktion von Vektoren:

$$\underline{A} = A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z$$

$$\underline{B} = B_x \underline{e}_x + B_y \underline{e}_y + B_z \underline{e}_z$$

$$\underline{R} = (A_x + B_x)\underline{e}_x + (A_y + B_y)\underline{e}_y + (A_z + B_z)\underline{e}_z$$

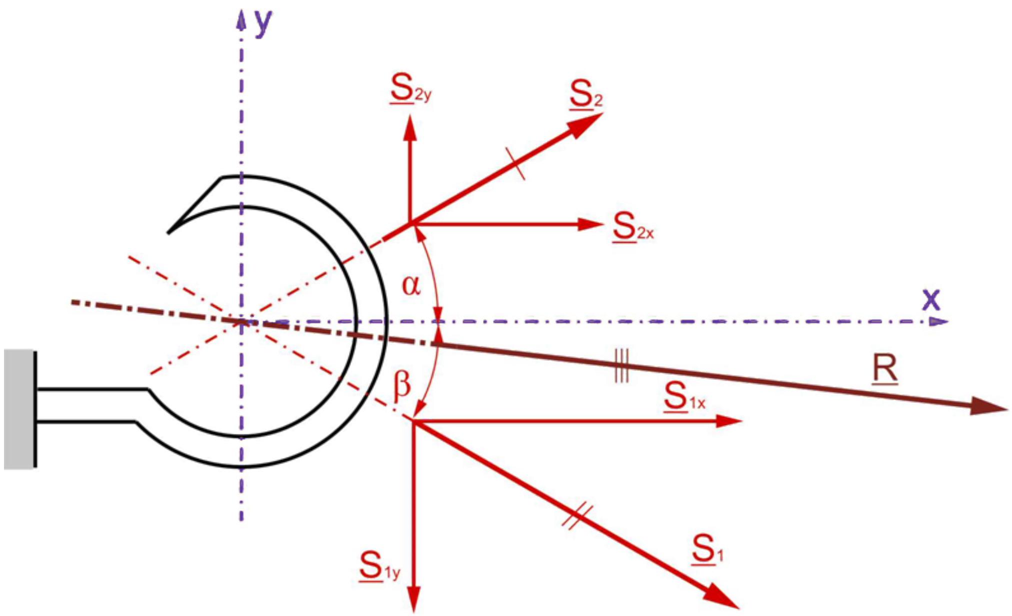
analog für Subtraktion

Alternative Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

Beispiel:



Geg.: $\alpha, \beta, S_1 = |\underline{S}_1|, S_2 = |\underline{S}_2|$

Ges.: Resultierender Kraftvektor $\underline{R}$

rechnerische Lösung:

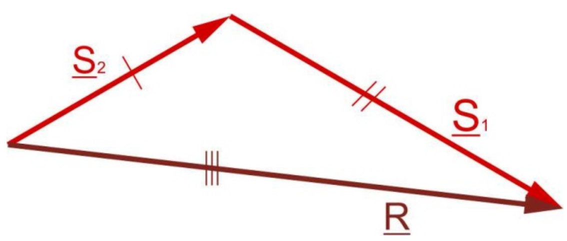
$$\underline{S}_1 = S_1 \cos\beta \, \underline{e}_x - S_1 \sin\beta \, \underline{e}_y$$

$$\underline{S}_2 = S_2 \cos\alpha \, \underline{e}_x + S_2 \sin\alpha \, \underline{e}_y$$

$$\underline{R} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (S_1 \cos\beta + S_2 \cos\alpha) \, \underline{e}_x + $$
$$+(- S_1 \sin\beta + S_2 \sin\alpha) \, \underline{e}_y$$

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} S_1 \cos\beta + S_2 \cos\alpha \\ - S_1 \sin\beta + S_2 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

graphische Lösung:



1.2 Kraftangriffspunkt

Der Begriff „Einzelkraft“ ist bereits eine Idealisierung. In der Realität treten zwei Fälle auf:

1.) räumlich verteile Kräfte (Volumskräfte oder Massenkräfte)

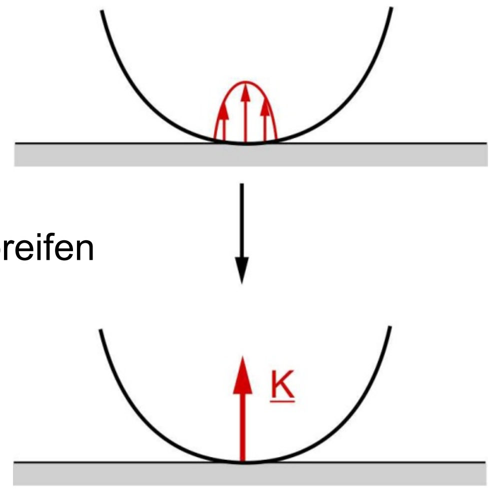
$$\underline{k} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \underline{F}^V}{\Delta V} \qquad [\underline{k}] = \mathrm{N/m^3}$$

z.B. Schwerkraft (im Modell Ersatz durch Einzellast im Schwerpunkt)

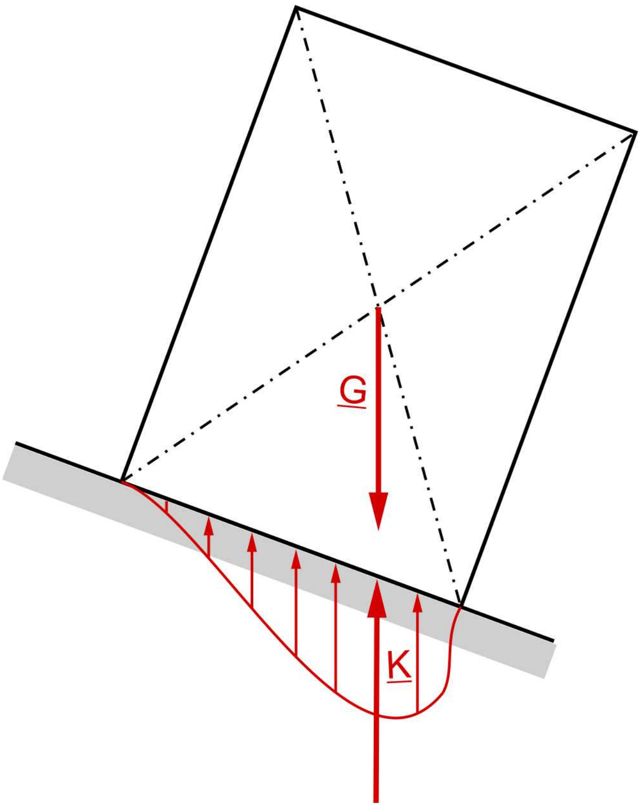
2.) flächig verteile Kräfte (Oberflächenkräfte)

$$\underline{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \underline{F}^A}{\Delta A} \qquad [\underline{\sigma}] = \mathrm{N/m^2}$$

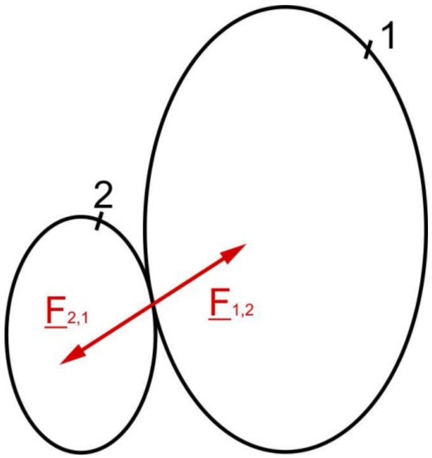
z.B. Druckverteilung auf einem Autoreifen
(Ersatz durch Einzellast)



bei größerer Berührfläche:



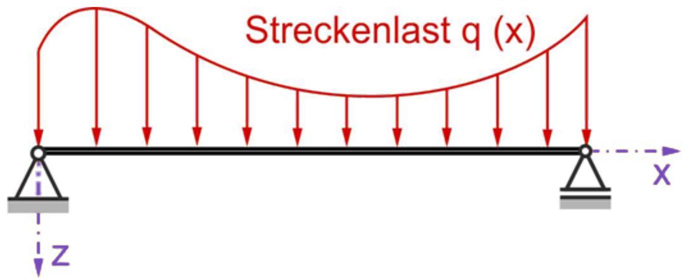
Kräfte treten paarweise, mit gleichem Betrag, entgegengesetzt auf (3. Newtonsches Axiom)



$\underline{K}$ ….. Kontaktkraft von Unterlage auf Körper

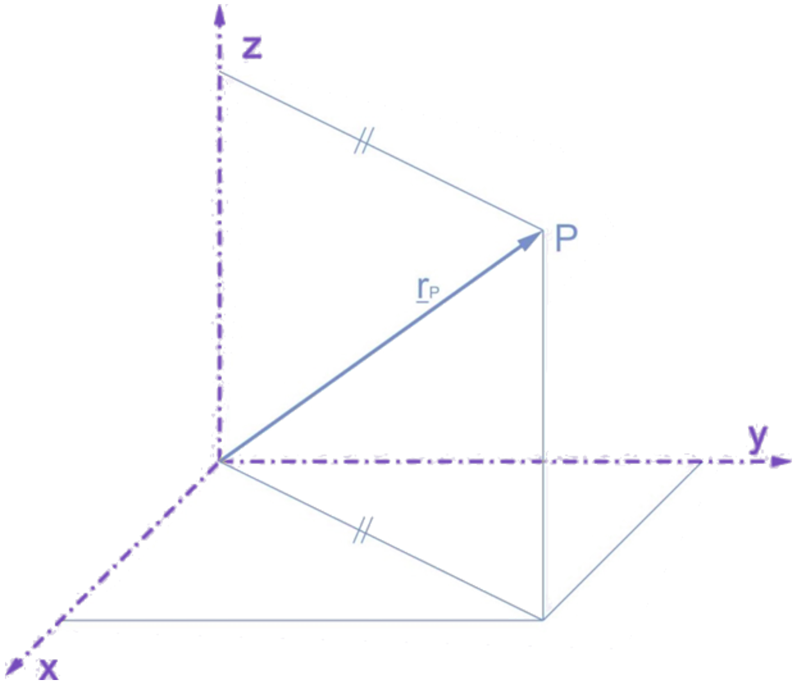
Ersatz durch Einzelkraft bei der Berechnung der Verformungen und inneren Beanspruchungen i.a. nicht zulässig

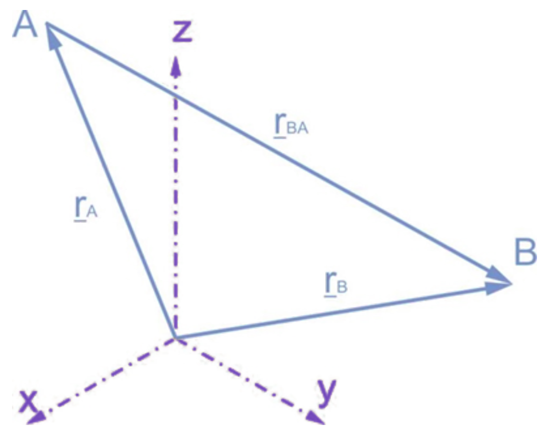
Für 2D Modelle werden häufig linienmäßig verteilte Lasten (= Streckenlasten) benötigt:



$$\underline{q} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \underline{F}^{l}}{\Delta x} \qquad [\underline{q}] = \text{N/m}$$

1.3 Der Ortsvektor





$\underline{r}_{BA} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$

Ziel Ausgangspunkt

$\underline{r}_P = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$ oder $\underline{r}_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

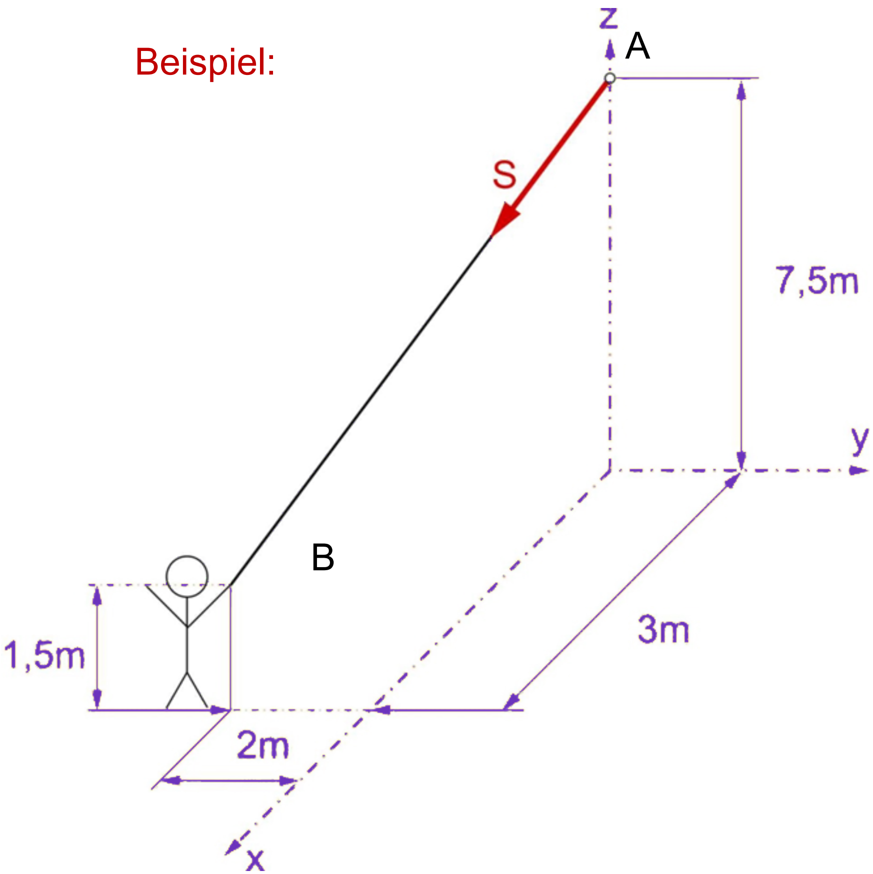
$\underline{r}_{BA} = (x_B - x_A)\underline{e}_x + (y_B - y_A)\underline{e}_y + (z_B - z_A)\underline{e}_z$

normierter Richtungsvektor $\underline{n}_{BA} = \frac{\underline{r}_{BA}}{|\underline{r}_{BA}|}$ $|\underline{n}_{BA}| = 1$

Ist die Wirkungslinie einer Kraft durch 2 Punkte A und B gegeben und kennt man die Größe der Kraft, so kann man den Kraftvektor wie folgt anschreiben:

$$\underline{F} = \lambda \underline{r}_{BA} = F \underline{n}_{BA} = F \frac{\underline{r}_{BA}}{|\underline{r}_{BA}|} \Rightarrow \lambda = \frac{F}{|\underline{r}_{BA}|}$$

Beispiel:



Geg.: $S = 350$ N, Punkte A, B
Ges.: $\underline{S}$

$$\underline{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad |\underline{r}_{BA}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7$$

$$\underline{S} = \frac{350}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ -100 \\ -300 \end{pmatrix}$$

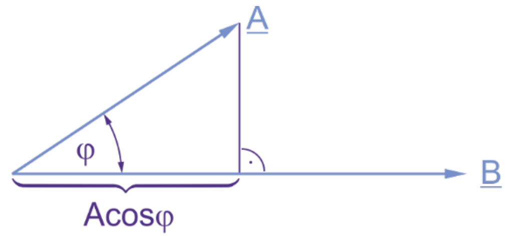
oder

$$\underline{S} = 150\underline{e}_x - 100\underline{e}_y - 300\underline{e}_z$$

1.4 Vektorprodukte - Inneres Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren: "In-Produkt"

$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$ kommutativ!

Definition: $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos\varphi}$



Projektion eines Vektors auf den anderen. Wird in der Mechanik z.B. für die Definition von Arbeit, Leistung etc. benötigt.

$$\underline{A} = A_x \underline{e_x} + A_y \underline{e_y} + A_z \underline{e_z}$$
$$\underline{B} = B_x \underline{e_x} + B_y \underline{e_y} + B_z \underline{e_z}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_x \underline{e_x} + A_y \underline{e_y} + A_z \underline{e_z}) \cdot (B_x \underline{e_x} + B_y \underline{e_y} + B_z \underline{e_z}) =$$

$$A_x B_x \underline{e_x} \cdot \underline{e_x} + A_x B_y \underline{e_x} \cdot \underline{e_y} + A_x B_z \underline{e_x} \cdot \underline{e_z} +$$
$$A_y B_x \underline{e_y} \cdot \underline{e_x} + A_y B_y \underline{e_y} \cdot \underline{e_y} + A_y B_z \underline{e_y} \cdot \underline{e_z} +$$
$$A_z B_x \underline{e_z} \cdot \underline{e_x} + A_z B_y \underline{e_z} \cdot \underline{e_y} + A_z B_z \underline{e_z} \cdot \underline{e_z} =$$

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Man beachte:

$$\underline{e_i} \cdot \underline{e_j} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

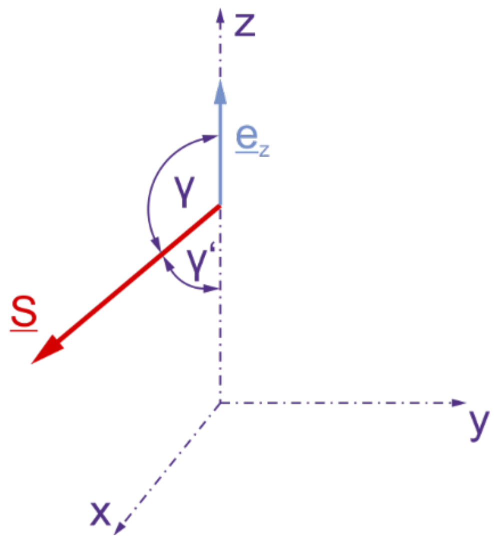
i,j ...x, y, z

Winkel zwischen 2 Vektoren:

$$\cos\varphi = \frac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{|\underline{A}||\underline{B}|}$$

z.B. in vorigem Beispiel: Winkel γ zwischen $\underline{S}$ und z-Achse:

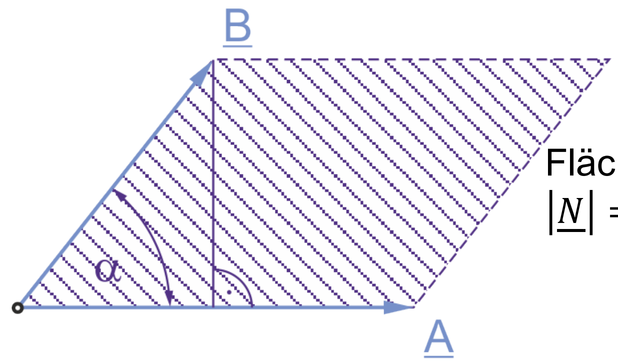
$$\cos\gamma = \frac{\underline{S}\cdot\underline{e_z}}{|\underline{S}||\underline{e_z}|} = \frac{S_z}{S} = \frac{-300}{350} \Rightarrow \ \gamma = 149°, \gamma' = 31°$$



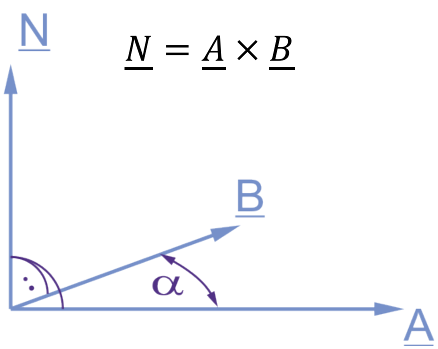
Vektorprodukte - Äußeres Produkt (vektorielles Produkt) zweier Vektoren: „Ex-Produkt"

$\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A}$ nicht kommutativ!

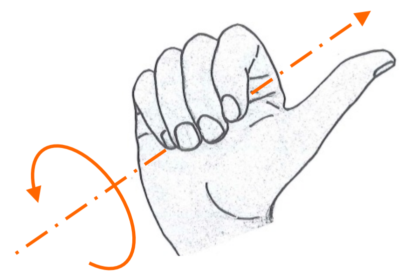
Definition: $\boxed{\left|\underline{A} \times \underline{B}\right| = \left|\underline{A}\right|\left|\underline{B}\right| \sin\alpha}$



Flächeninhalt
$\left|\underline{N}\right| = \left|\underline{A} \times \underline{B}\right|$



$\underline{N} = \underline{A} \times \underline{B}$



Rechtsschraubregel

$\underline{A} \times \underline{B} = \underline{0}$, wenn $\underline{A} \parallel \underline{B}$ oder $\left|\underline{A}\right| = 0$ oder $\left|\underline{B}\right| = 0$

$k\left(\underline{A} \times \underline{B}\right) = k\underline{A} \times \underline{B} = \underline{A} \times k\underline{B}$ assoziativ für die Multiplikation mit einem Skalar

$\underline{A} \times \left(\underline{B} + \underline{C}\right) = \left(\underline{A} \times \underline{B}\right) + \left(\underline{A} \times \underline{C}\right)$ distributiv

$\underline{A} \times \underline{B} + \underline{C} = \left(\underline{A} \times \underline{B}\right) + \underline{C} \neq \underline{A} \times \left(\underline{B} + \underline{C}\right)$ “Punkt vor Strich”

$$\underline{A} = A_x\underline{e}_x + A_y\underline{e}_y + A_z\underline{e}_z$$
$$\underline{B} = B_x\underline{e}_x + B_y\underline{e}_y + B_z\underline{e}_z$$

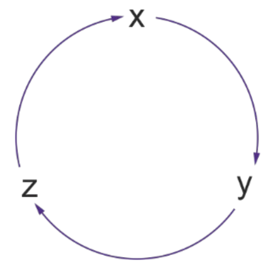
$$\underline{A} \times \underline{B} = (A_x\underline{e}_x + A_y\underline{e}_y + A_z\underline{e}_z) \times (B_x\underline{e}_x + B_y\underline{e}_y + B_z\underline{e}_z) =$$

$$A_xB_x\underline{e}_x \times \underline{e}_x + A_xB_y\underline{e}_x \times \underline{e}_y + A_xB_z\underline{e}_x \times \underline{e}_z +$$
$$A_yB_x\underline{e}_y \times \underline{e}_x + A_yB_y\underline{e}_y \times \underline{e}_y + A_yB_z\underline{e}_y \times \underline{e}_z +$$
$$A_zB_x\underline{e}_z \times \underline{e}_x + A_zB_y\underline{e}_z \times \underline{e}_y + A_zB_z\underline{e}_z \times \underline{e}_z =$$

$$(A_yB_z - A_zB_y)\underline{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\underline{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\underline{e}_z$$

Man beachte:

$$\underline{e}_x \times \underline{e}_x = \underline{0}$$
$$\underline{e}_y \times \underline{e}_y = \underline{0}$$
$$\underline{e}_z \times \underline{e}_z = \underline{0}$$



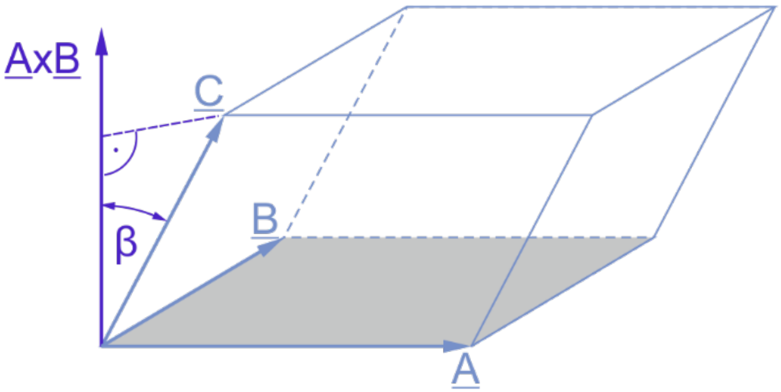
$$\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z \qquad \underline{e}_y \times \underline{e}_x = -\underline{e}_z$$
$$\underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_x \qquad \underline{e}_z \times \underline{e}_y = -\underline{e}_x$$
$$\underline{e}_z \times \underline{e}_x = \underline{e}_y \qquad \underline{e}_x \times \underline{e}_z = -\underline{e}_y$$

andere Schreibweise:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \underline{e}_x(A_yB_z - A_zB_y) - \underline{e}_y(A_xB_z - A_zB_x) + \underline{e}_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

Gemischtes Produkt dreier Vektoren: „Spatprodukt"

$(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot \underline{C}$ ist das Volumen des von $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ aufgespannten Parallelepipeds (Spat)



$$(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot \underline{C} = |\underline{A} \times \underline{B}||\underline{C}| \cos\beta$$

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot \underline{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

$\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ können zyklisch vertauscht werden.

Entwicklungssatz:

$$\boxed{\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})}$$

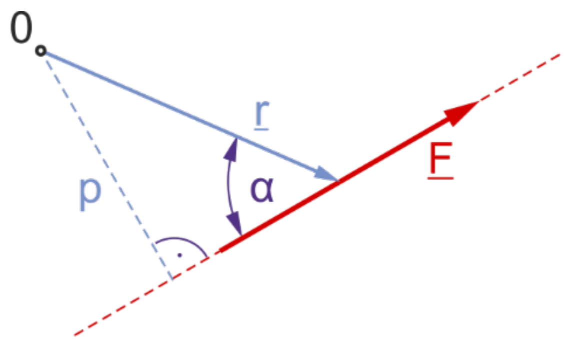
Man beachte:

$(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} \neq \underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C})$ nicht assoziativ

1.5 Der Momentenvektor

Das Moment einer Kraft bzgl. eines Bezugspunkts O:

Definition: $\boxed{\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}}$



$$|\underline{M}_O| = |\underline{r}||\underline{F}| \sin\alpha = |\underline{F}||\underline{r}| \sin\alpha =$$

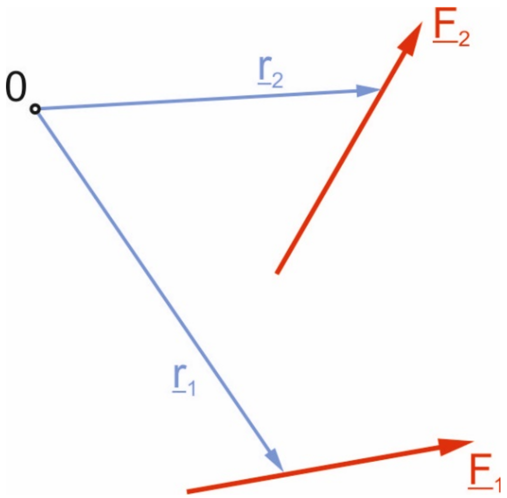
$= |\underline{F}|p$ ….. “Kraft” mal “Hebelarm” (sinnvoll nur in 2D)

Der Momentenvektor steht normal auf die von $\underline{r}$ und $\underline{F}$ aufgespannte Ebene. Der Drehsinn ergibt sich aus der Rechtsschraubregel.

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\underline{e}_x - (xF_z - zF_x)\underline{e}_y + (xF_y - yF_x)\underline{e}_z$$

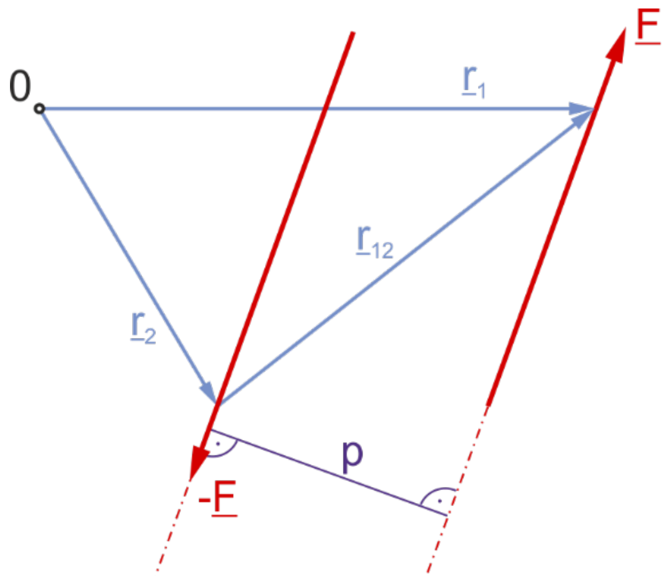
Offensichtlich ist $\underline{M}_O$ abhängig von der Wahl des Bezugspunkts.

Resultierender Momentenvektor eines Kraftsystems mit Bezugspunkt O:



$$\underline{M}_O^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

Moment eines Kräftepaars:



$$\underline{M}_O^{(R)} = \underline{r}_1 \times \underline{F} + \underline{r}_2 \times (-\underline{F}) = \\ = \underline{r}_1 \times \underline{F} - \underline{r}_2 \times \underline{F} = (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{F} \\ = \underline{r}_{12} \times \underline{F}$$

$\underline{r}_{12}$ ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunkts!

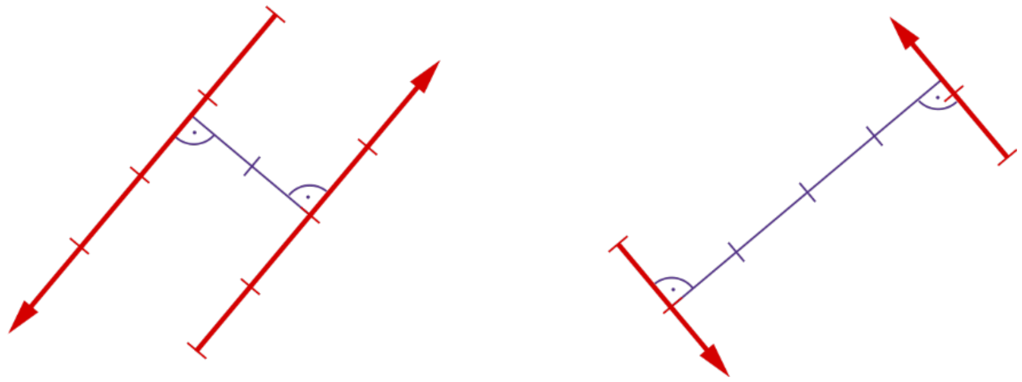
Abkürzend setzen wir $\underline{r}_{12} \rightarrow \underline{r}$

Also $\boxed{\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}}$ (man beachte: $\underline{M}$ hat keinen Index für den Bezugspunkt)

Wieder gilt für den Betrag: $|\underline{M}| = |\underline{F}|p$

Dieser $\underline{M}$ darf am starren Körper beliebig längs und parallel verschoben werden.

Äquivalente Kräftepaare erzeugen alle den gleichen Momentenvektor $\underline{M}$



Die Momente von Kräftepaaren können zu einem resultierenden Moment zusammengefasst werden:

$$\underline{M}^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

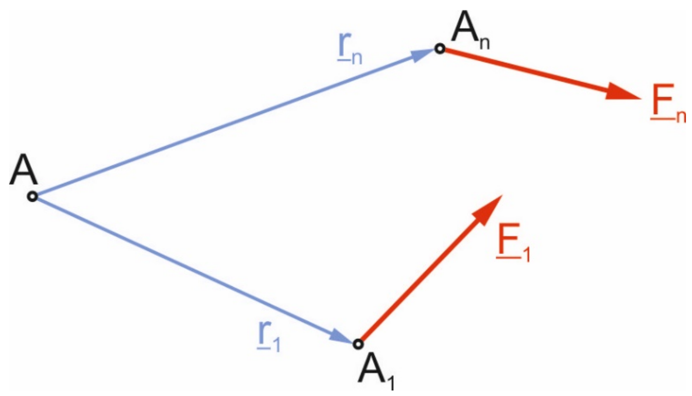
1.6 Kraftsysteme

	2D	3D
gemeinsamer Schnittpunkt aller Wirkungslinien	zentrales ebenes Kraftsystem	zentrales räumliches Kraftsystem
kein gemeinsamer Schnittpunkt aller Wirkungslinien	allgemeines ebenes Kraftsystem	allgemeines räumliches Kraftsystem

Reduktion eines Kraftsystems:

Geg.: Kräfte $\underline{F}_1$ bis $\underline{F}_n$ in den Angriffspunkten A_1 bis A_n

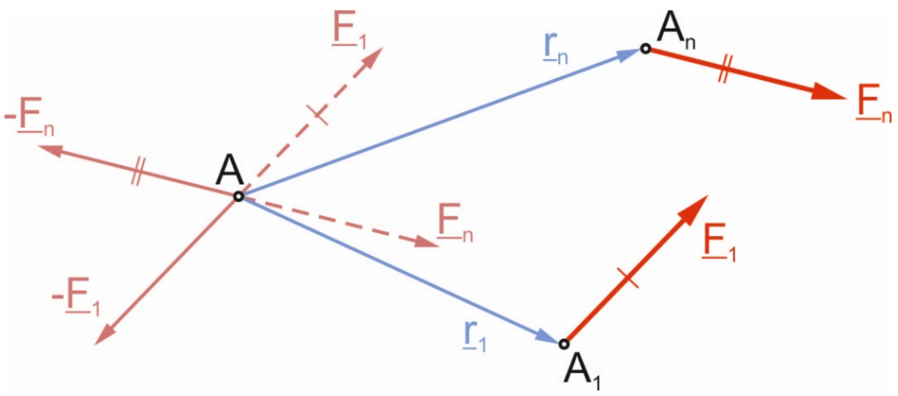
Ges.: Durch welches Gebilde im Punkt A läßt sich das Kraftsystem äquivalent ersetzen?



Reduktion eines Kraftsystems:

Geg.: Kräfte $\underline{F}_1$ bis $\underline{F}_n$ in den Angriffspunkten A_1 bis A_n

Ges.: Durch welches Gebilde im Punkt A läßt sich das Kraftsystem äquivalent ersetzen?



Verschiebt man eine Kraft parallel, so ist das nur durch ein zusätzliches Moment äquivalent möglich.

$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1$$
$$\ldots$$
$$\underline{M}_n = \underline{r}_n \times \underline{F}_n$$

$$\boxed{\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i} \qquad \boxed{\underline{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i}$$

A.....Reduktionspunkt

Reduktionsresultanten

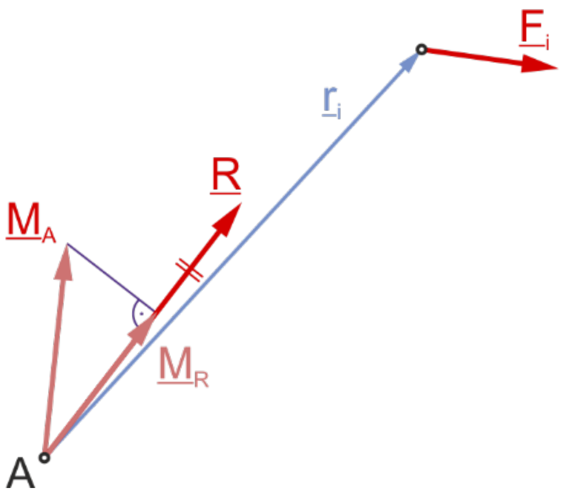
Haben Kraftsystem im gleichen Punkt gleiche Reduktionsergebnisse, nennt man sie äquivalent.

Welchen Einfluss hat die Wahl eines anderen Reduktionspunkts A‘?

Ausgangspunkt:

Reduktionsergebnis für den Punkt A: $\underline{R} = \sum \underline{F_i}, \;\; \underline{M_A} = \sum \underline{r_i} \times \underline{F_i}$

für A‘ gilt: $\underline{R} = \sum \underline{F_i}, \;\; \underline{M_{A'}} = \sum \underline{r_i'} \times \underline{F_i}$



Haben Kraftsystem im gleichen Punkt gleiche Reduktionsergebnisse, nennt man sie äquivalent.

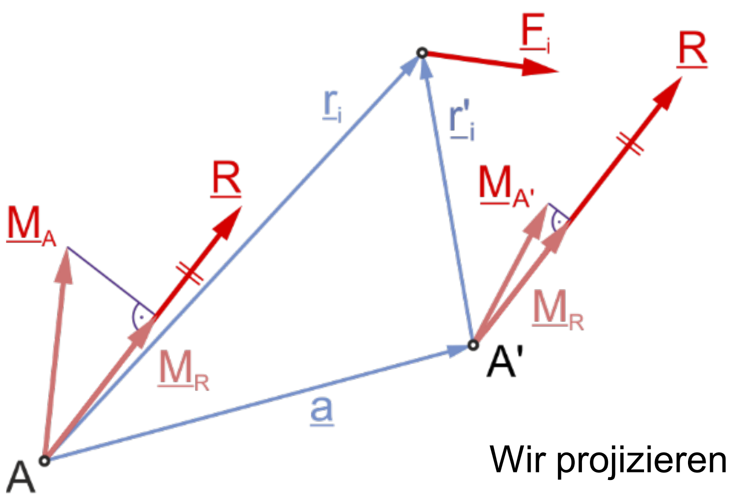
Welchen Einfluss hat die Wahl eines anderen Reduktionspunkts A‘?

Ausgangspunkt:

Reduktionsergebnis für den Punkt A: $\underline{R} = \sum \underline{F}_i,\ \ \underline{M}_A = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i$

für A‘ gilt: $\underline{R} = \sum \underline{F}_i,\ \ \underline{M}_{A'} = \sum \underline{r}_i' \times \underline{F}_i$

$\underline{r}_i' = \underline{r}_i - \underline{a}$



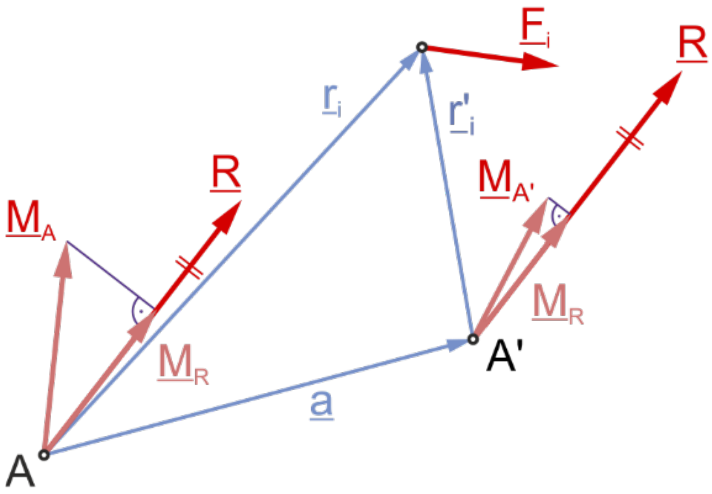
$$\underline{M}_{A'} = \sum (\underline{r}_i - \underline{a}) \times \underline{F}_i = \underbrace{\sum (\underline{r}_i \times \underline{F}_i)}_{\underline{M}_A} - \left(\underline{a} \times \underbrace{\sum \underline{F}_i}_{\underline{R}}\right)$$

$$\underline{M}_{A'} = \underline{M}_A - (\underline{a} \times \underline{R})$$

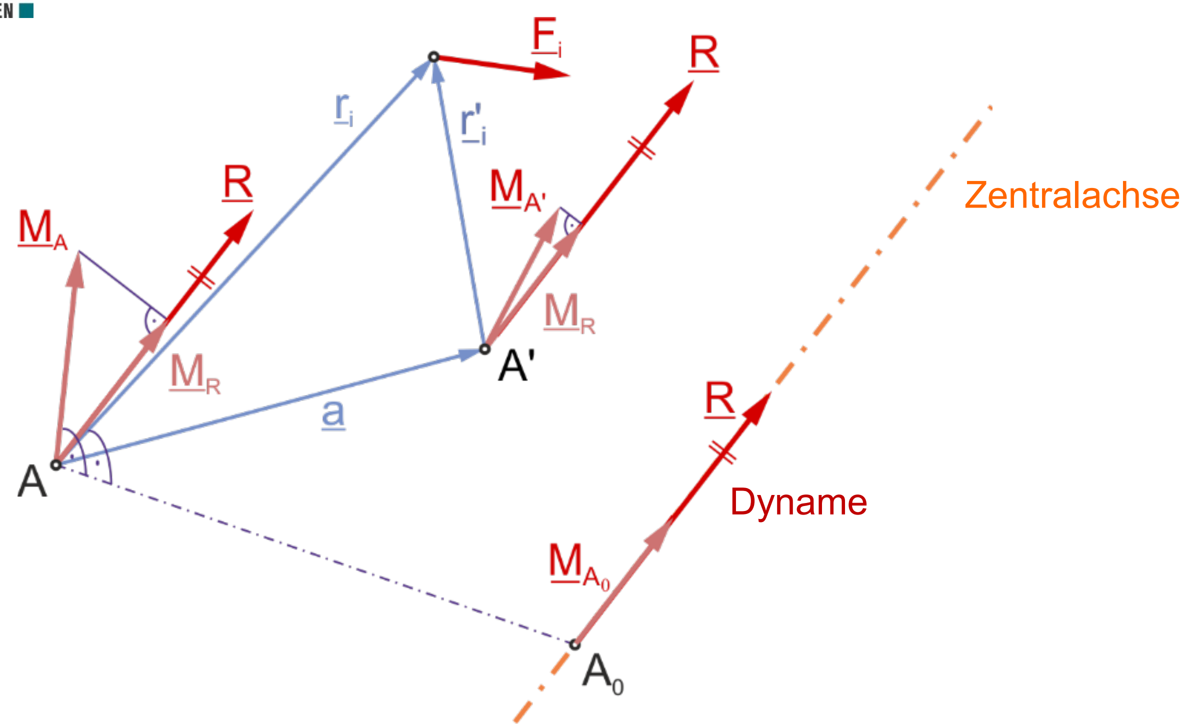
$\underline{M}_{A'}$ nur dann = $\underline{M}_A$, wenn $\underline{R} = \underline{0}$ oder $\underline{a} \parallel \underline{R}$

Wir projizieren nun $\underline{M}_{A'}$ auf den normierten $\underline{R}$, d.h. auf $\underline{n} = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}$:

$$\underline{M}_{A'} \cdot \underline{n} = \underline{M}_A \cdot \underline{n} - \underbrace{(\underline{a} \times \underline{R}) \cdot \underline{n}}_{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{M}_{A'} \cdot \underline{n} = \underline{M}_A \cdot \underline{n} = M_R, \qquad \underline{M}_R = M_R \underline{n}$$



$$\underline{M}_{A'} = \underline{M}_A - (\underline{a} \times \underline{R})$$



Bei geeigneter Wahl des Reduktionspunkts verschwindet die Normalkomponente von $\underline{M}_{A_0}$ und es verbleibt die auf der Zentralachse liegende Dyname oder Kraftschraube des Systems.

Sie ist charakteristisch für das Kraftsystem.