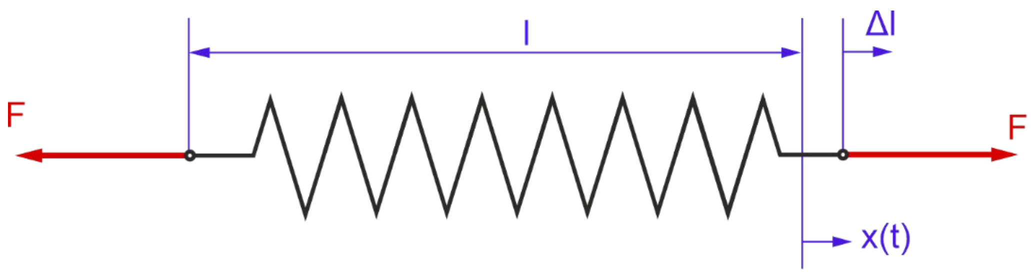
22.1 Schwingungsgleichung

Schwingungen sind Vorgänge, die sich periodisch wiederholen.

Federn, linear:

Federn stellen die einfachsten schwingungsfähigen Elemente dar.

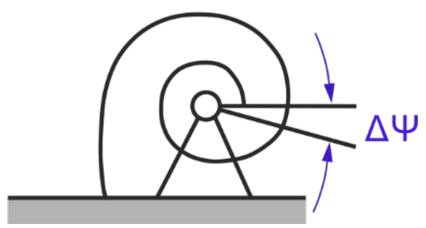


Federkonstante

$$F = c\Delta\ell = cx \qquad [c] = \mathrm{N/m}$$

ℓ….. entspannte Länge

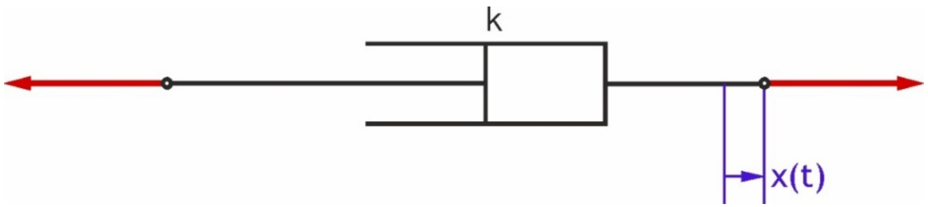
Drehfeder:



Drehfederkonstante

$$M = c_T\Delta\psi \qquad [c_\tau] = \mathrm{Nm}$$

Dämpfer:



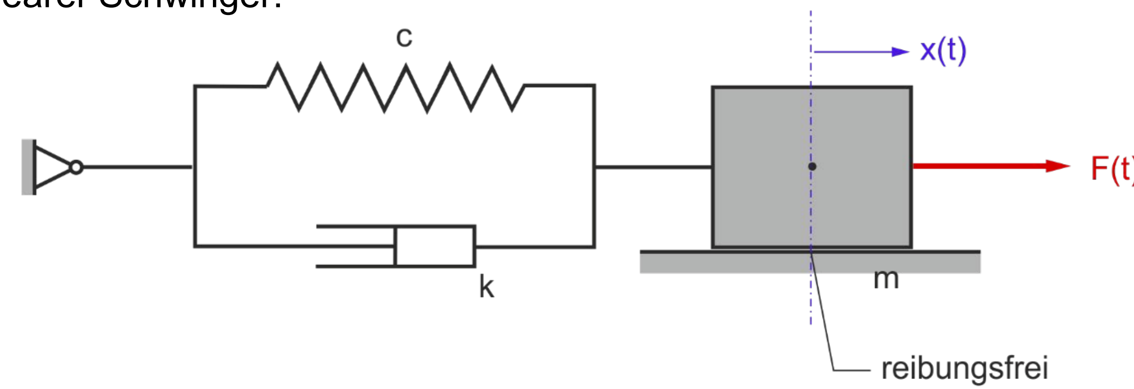
Dämpfungskonstante

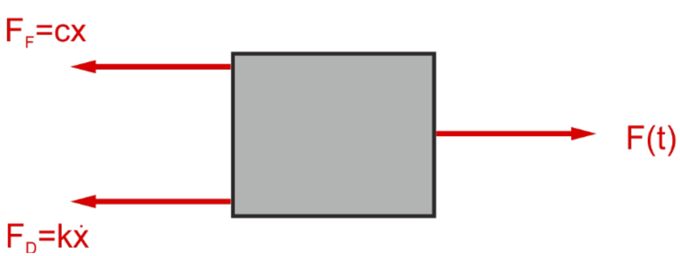
$$F = k\dot{x}$$

$$[k] = \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$$

…geschw. prop. Dämpfung

linearer Schwinger:





$$SS: m\ddot{x} = F(t) - cx - k\dot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)}$$

Differentialgleichung der linearen Schwingung

Schwingungsdifferentialgleichung

22.2 Freie Schwingung

Freie Schwingung, wenn $F(t) = 0$

erzwungene (krafterregte) Schwingung, wenn $F(t) \neq 0$

ungedämpfte, freie Schwingung: $m\ddot{x} + cx = 0$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

Lösungsansatz:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$A, B, \omega \ldots$ Konstanten

$$-m\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + c(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = 0$$

$$(c - m\omega^2)(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = 0$$

Muss für alle t erfüllt sein $\Rightarrow c - m\omega^2 = 0$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ …Eigenkreisfrequenz $[\omega] = s^{-1}$

Allgemein: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ …Periodendauer $[T] = s$

hier: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$

gedämpfte, freie Schwingung: $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$

Mit $\lambda = \frac{k}{2m}$ und $\omega^2 = \frac{c}{m}$ ergibt sich:

λ…Abklingkoeffizient

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Allgemeiner Ansatz: $x(t) = Ce^{\alpha t}$

$$\dot{x}(t) = C\alpha e^{\alpha t}$$

$$\ddot{x}(t) = C\alpha^2 e^{\alpha t}$$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2)}_{0}\, Ce^{\alpha t} = 0$ für alle t

$\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ → Fallunterscheidung

1) $\lambda > \omega > 0$: starke Dämpfung

2) $\lambda = \omega$: aperiod. Grenzfall

3) $\omega > \lambda > 0$: schwache Dämpfung

1) $x(t) = e^{-\lambda t}\left[Ae^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + Be^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right]$

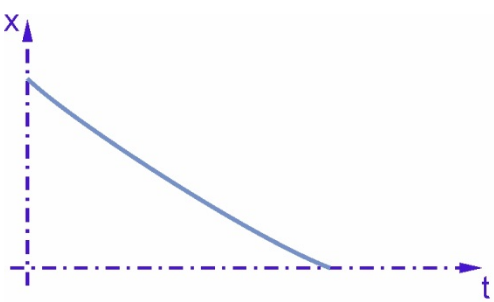
2) $x(t) = e^{-\lambda t}[A + Bt]$

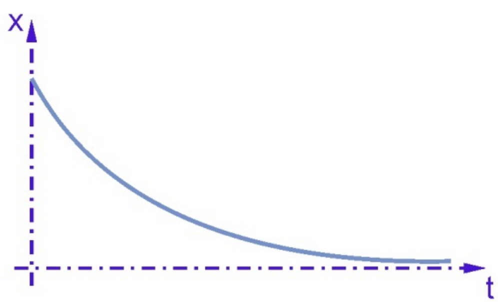
3) $x(t) = e^{-\lambda t}\left[A\cos\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t\right)\right]$

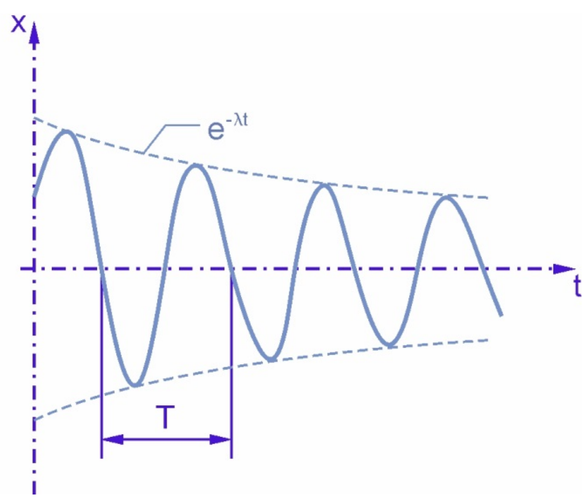
$$\omega^2 = \frac{c}{m} \qquad \lambda = \frac{k}{2m}$$

Die Periodendauer einer gedämpften Schwingung ist größer als die Periodendauer der ungedämpften Schwingung

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$







Lehrsches Dämpfungsmaß:

Dimensionslose Kennzahl zur Beurteilung, wie sich das schwingfähige System nach der Anregung verhält.

$$D = \frac{\lambda}{\omega}$$

Das Lehr‘sche Dämpfungsmaß kann zur Charakterisierung des Schwingverhaltens herangezogen werden.

- $D=0$ → ungedämpfte Schwingung
- $0<D<1$ → schwach gedämpfte Schwingung
- $D=1$ → aperiodischer Grenzfall
- $D>1$ → stark gedämpfte Schwingung

22.3 Krafterregte Schwingung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

z.B.: $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = S\cos\Omega t \qquad | : m$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2\lambda}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2} x = \frac{S}{m}\cos\Omega t$$

Ansatz für die Partikulärlösung:

$$x_p(t) = C\cos\Omega t + D\sin\Omega t$$

$$\dot{x}_p(t) = -C\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -C\Omega^2\cos\Omega t - D\Omega^2\sin\Omega t$$

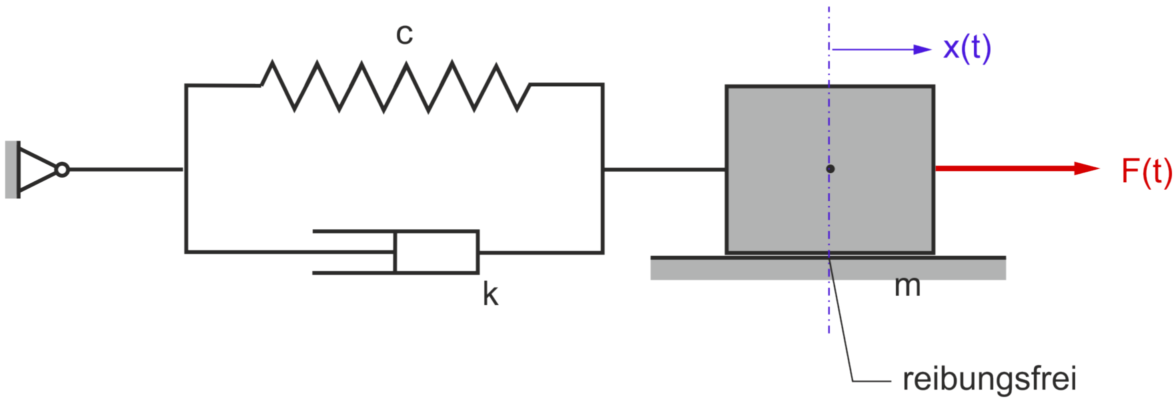
Einsetzen der Partikulärlösung liefert:

$$\rightarrow \quad -C\Omega^2\cos\Omega t - D\Omega^2\sin\Omega t + 2\lambda(-C\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t) + \omega^2(C\cos\Omega t + D\sin\Omega t) = {}^{S}/_{m}\cos\Omega t$$

Die Gleichung muss zu jedem beliebigen Zeitpunkt t erfüllt sein. Das ist nur möglich, wenn folgende 2 Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned}(\omega^2 - \Omega^2)C + 2\lambda\Omega D &= {}^{S}/_{m} \\ -2\lambda\Omega C + (\omega^2 - \Omega^2)D &= 0\end{aligned}\right\} \quad C, D$$

Beispiel: Krafterregte Schwingung



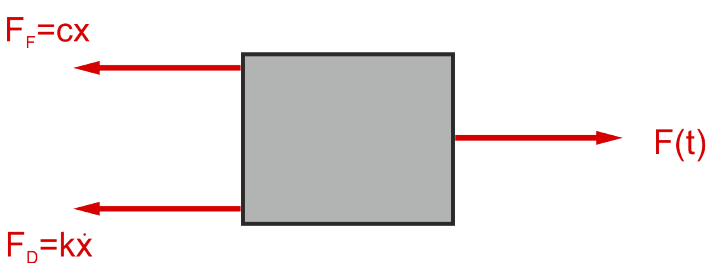
Geg.: $c = 100\ \mathrm{N/m}$
$k = 100\mathrm{Ns/m}$
$F(t) = F_0 \sin \Omega t$
Masse m

Anfangsbed.:

$x(t=0) = 0$
$\dot{x}(t=0) = 0$

Ges.: Bewegungsgleichung

$$\lambda = \frac{k}{2m} = \frac{50}{m}, \qquad \omega = \frac{c}{m} = \frac{100}{m} \qquad \rightarrow \omega > \lambda$$



Zunächst muss die Bewegungsgleichung aufgestellt werden

$SS: m\ddot{x} = F(t) - cx - k\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$ Inhomogene DGL 2. Ordnung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL besteht aus einer homogenen und einer partikulären Lösung: $x = x_h + x_p$

Zunächst wird die homogene Lösung bestimmt:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Lösungsansatz:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Ce^{\alpha t} \\ \dot{x}(t) &= \alpha Ce^{\alpha t} \\ \ddot{x}(t) &= \alpha^2 Ce^{\alpha t} \end{aligned}\right\}$$ Einsetzen in homogene DGL

$$\alpha^2 Ce^{\alpha t} + 2\lambda\alpha Ce^{\alpha t} + \omega^2 Ce^{\alpha t} = 0$$

Zusammenfassen zum charakteristischen Polynom

$$(\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2)Ce^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

$\omega > \lambda$ →Es liegt eine schwache Dämpfung vor, somit folgt für die homogene Lösung:

$$x_h = e^{-\lambda t}\left[A\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right)\right]$$

Achtung: Die Anfangsbedingungen dürfen erst bei der vollständigen Lösung (homogen +partikulär) zur Ermittlung der Koeffizienten angesetzt werden.

Nun folgt die partikuläre Lösung:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

Lösungsansatz:

$$\left.\begin{aligned} x_p &= C sin(\Omega t) + D cos(\Omega t) \\ \dot{x}_p &= \Omega C cos(\Omega t) - \Omega D sin(\Omega t) \\ \ddot{x}_p &= -\Omega^2 C sin(\Omega t) - \Omega^2 D cos(\Omega t) \end{aligned}\right\} \text{Einsetzen in DGL}$$

$$-\Omega^2 C sin(\Omega t) - \Omega^2 D cos(\Omega t) + 2\lambda[\Omega C cos(\Omega t) - \Omega D sin(\Omega t)] + \omega^2[C sin(\Omega t) + D cos(\Omega t)] = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

Zusammenfassen des Ausdruckes:

$$-(\Omega^2 C + 2\lambda\Omega D - \omega^2 C) sin(\Omega t) - (\Omega^2 D - 2\lambda\Omega C - \omega^2 D) cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left.\begin{aligned} -\Omega^2 C - 2\lambda\Omega D + \omega^2 C &= \frac{F_0}{m} \\ -\Omega^2 D + 2\lambda\Omega C + \omega^2 D &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Gleichungssystem zur Bestimmung von } C \text{ und } D$$

$$(\omega^2-\Omega^2)C-2\lambda\Omega D=\frac{F_0}{m}$$

$$2\lambda\Omega C+(\omega^2-\Omega^2)D=0$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$C=\frac{F_0(\omega^2-\Omega^2)}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]} \qquad D=-\frac{2\lambda\Omega F_0}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}$$

Somit folgt die partikuläre Lösung:

$$x_p=\frac{F_0(\omega^2-\Omega^2)}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}sin(\Omega t)-\frac{2\lambda\Omega F_0}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}cos(\Omega t)$$

Somit folgt die Gesamtlösung:

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left[A cos\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t\right)+B sin\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t\right)\right]+\frac{F_0(\omega^2-\Omega^2)}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}sin(\Omega t)-\frac{2\lambda\Omega F_0}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}cos(\Omega t)$$

Nun können mit den Anfangsbedingungen die restlichen Integrationskonstanten ermittelt werden:

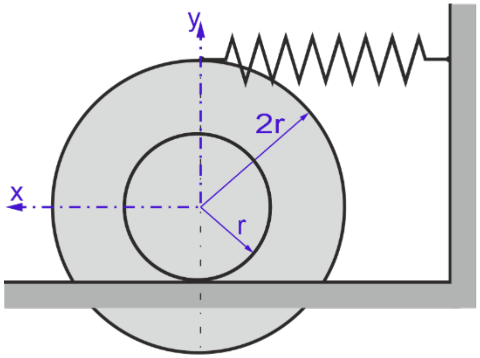
$$AB: x(t=0)=0, \dot{x}(t=0)=0$$

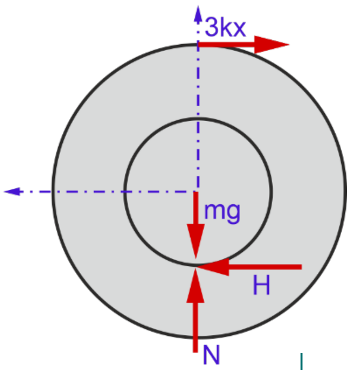
$$A = \frac{2\lambda\Omega F_0}{m[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}$$

$$B = \frac{2\lambda^2\Omega F_0}{m\omega[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]} - \frac{F_0(\omega^2-\Omega^2)\Omega}{m\omega[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]} = \frac{F_0\Omega[2\lambda^2-(\omega^2-\Omega^2)]}{m\omega[(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]}$$

Beispiel: Drehschwinger

Geg. m, r, Federkonstante k, i_S, μ_H
Ges. ω, x_{max} sodass die Haftbedingung gilt





Annahme reines Rollen. Voraussetzung kleine Auslenkungen

Schwerpunkt- und Drallsatz:

$$\mathrm{SS(x)}: m\ddot{x} = H - 3kx$$

$$\mathrm{SS(y)}: 0 = N - mg \rightarrow N = mg$$

$$\mathrm{DS(A)}: m(i_S^2 + r^2)\frac{\ddot{x}}{r} = -9kxr \rightarrow \ddot{x} = \frac{-9kr^2}{m(i_S^2 + r^2)}x$$

Somit folgt:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{9kr^2}{m(i_S^2 + r^2)}}_{\omega^2} x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9kr^2}{m(i_S^2 + r^2)}}$$

Überprüfen der Haftbedingung:

$$H = m\ddot{x} + 3kx = 3kx\left(1 - \frac{3r^2}{i_S^2 + r^2}\right)$$

Wie groß darf x werden, sodass die Haftbedingung gerade nicht verletzt wird.

$$|H| \leq \mu_H |N|$$

$$3kx\left(1 - \frac{3r^2}{i_S^2 + r^2}\right) \leq \mu_H mg$$

$$x_{max} \leq \frac{\mu_H mg}{3k\left(1 - \frac{3r^2}{i_S^2 + r^2}\right)}$$