21.1 Herleitung

Ausgangspunkt: Integration über $\underline{r} \times$ dynamisches Grundgesetz $\rho \underline{a} = \underline{k} + \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z}$

$$\int_m \underline{r} \times \underline{a} dm = \int_V \underline{r} \times \underline{k} dV + \int_V \underline{r} \times \left(\frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z} \right) dV = (*)$$

Mathematischer Einschub:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\underline{r} \times \underline{q}) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x} \times \underline{q} + \underline{r} \times \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{r} \times \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\underline{r} \times \underline{q}) - \underline{e}_x \times \underline{q}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z) = \underline{e}_x \qquad \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} = \underline{e}_y \qquad \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{e}_z$$

$$\underline{e}_x \times \underline{q} = \underline{e}_x \times (q_x \underline{e}_x + q_y \underline{e}_y + q_z \underline{e}_z) = q_y \underline{e}_z - q_z \underline{e}_y$$

$$(*) = \int_V \underline{r} \times \underline{k} dV + \underbrace{\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(\underline{r} \times \underline{\sigma}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\underline{r} \times \underline{\sigma}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\underline{r} \times \underline{\sigma}_z) \right] dV}_{(\triangle)} - \underbrace{\int_V [\underline{e}_x \times \underline{\sigma}_x + \underline{e}_y \times \underline{\sigma}_y + \underline{e}_z \times \underline{\sigma}_z] dV}_{(\square)} =$$

mit Gauß‘schem Integralsatz:

$$(\triangle) = \oint_A \underline{r} \times (\underline{\sigma}_x n_x + \underline{\sigma}_y n_y + \underline{\sigma}_z n_z) dA = \oint_A \underline{r} \times \underline{\sigma}_n dA$$ …resultierendes Moment der Oberflächenkräfte

$$(\square) = \int_V (\sigma_{xy}\underline{e}_z - \sigma_{xz}\underline{e}_y + \sigma_{yz}\underline{e}_x - \sigma_{yx}\underline{e}_z + \sigma_{zx}\underline{e}_y - \sigma_{zy}\underline{e}_x) dV$$

$$= \int_V \left[(\sigma_{yz} - \sigma_{zy})\underline{e}_x - (\sigma_{zx} - \sigma_{xz})\underline{e}_y - \left(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}\right)\underline{e}_z\right] dV = \underline{0}$$

nur, wenn $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Boltzmann Axiom *)

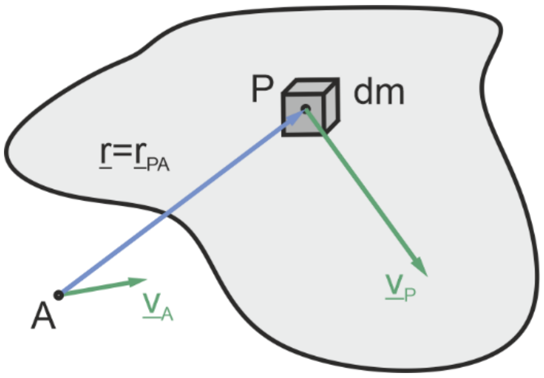
$$\int_m \underline{r} \times \underline{a} dm = \underbrace{\underbrace{\int_V \underline{r} \times \underline{k} dV}_{\text{Moment der Volumskräfte}} + \underbrace{\oint_A \underline{r} \times \underline{\sigma}_n dA}_{\text{Moment der Oberflächenkräfte}}}_{\text{Moment der äußeren Kräfte } \underline{M}_R} = \underline{M}_R$$

$$\boxed{\int_m \underline{r} \times \underline{a}\, dm = \underline{M}_R}$$ …Momentensatz

*) Der Satz der zugeordneten Schubspannungen ist an sich eine Konsequenz eines Momentengleichgewichts. In der Dynamik kann er nicht in analoger Weise hergeleitet werden. Er wird daher axiomatisch verwendet.

Definition: Drall = Drehimpuls = Impulsmoment bezüglich eines Punktes A

$$\boxed{\underline{D}_A = \int_m \underline{r} \times \underline{v}_{PA} dm}$$



Zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$\frac{d\underline{D}_A}{dt} = \underbrace{\int_m \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}_{PA}} \times \underline{v}_{PA} dm}_{\underline{0}} + \int_m \underline{r} \times \underline{a}_{PA} dm =$$

$$\underline{a}_{PA} = \underline{a}_P - \underline{a}_A$$

$$= \int_m \underline{r} \times \underline{a}_P dm - \int_m \underline{r} \times \underline{a}_A dm \;\; = \int_m \underline{r} \times \underline{a}_P dm - \underbrace{\int \underline{r}\, dm}_{} \times \underline{a}_A = (*)$$

hängt nicht von x, y, z ab

$$\underline{r}_M = \frac{1}{m} \int \underline{r} dm$$ …Massenmittelpunkt

$$(*) = \underbrace{\int_m \underline{r} \times \underline{a}_P \, dm}_{\underline{M}_R} - m\underline{r}_M \times \underline{a}_A \rightarrow$$ Einsetzen in den Momentensatz

$$\frac{d\underline{D}_A}{dt} = \underline{M}_R - m\underline{r}_M \times \underline{a}_A$$

Statt $\underline{r}_M$ schreiben wir wieder $\underline{r}_{SA}$

$$\boxed{\frac{d\underline{D}_A}{dt} + m\underline{r}_{SA} \times \underline{a}_A = \underline{M}_R}$$ Drallsatz

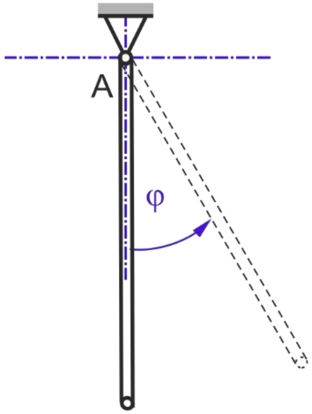
Der Term $m\underline{r}_{SA} \times \underline{a}_A$ fällt weg, wenn:

1) Bezugspunkt $A \equiv SP$ $(\underline{r}_{SA} = \underline{0})$

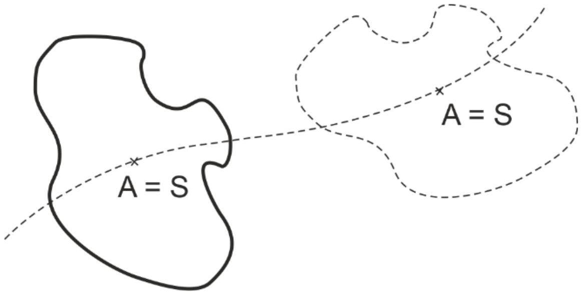
2) Bezugspunkt unbeschleunigt: d. h. $\underline{a}_A = \underline{0}$

3) $\underline{r}_{SA} \parallel \underline{a}_A$

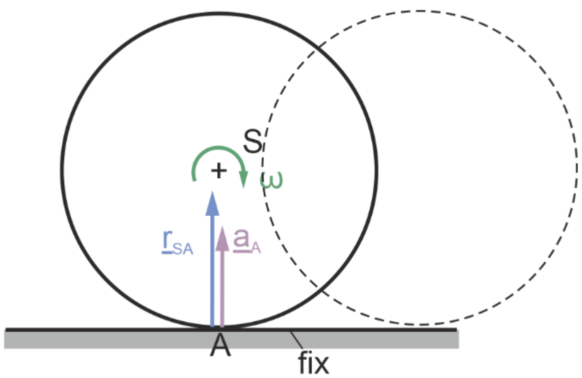
ad 2)



ad 1)



ad 3)



21.2 Spezialisierung auf starre Körper

$$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z \rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{v}_{PA} = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}$$

$$\underline{r} \times \underline{v}_{PA} = \underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \underbrace{r^2\underline{\omega}} - \underbrace{(\underline{r} \cdot \underline{\omega})\ \underline{r}} =$$ (Entwicklungssatz)

$$\underline{\omega} = \omega_x\underline{e}_x + \omega_y\underline{e}_y + \omega_z\underline{e}_z$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} (x^2+y^2+z^2)\omega_x \\ (x^2+y^2+z^2)\omega_y \\ (x^2+y^2+z^2)\omega_z \end{bmatrix}}^{3\times 1} - \overbrace{\begin{bmatrix} x^2\omega_x + yx\omega_y + zx\omega_z \\ xy\omega_x + y^2\omega_y + zy\omega_z \\ xz\omega_x + yz\omega_y + z^2\omega_z \end{bmatrix}}^{3\times 1} = \overbrace{\begin{bmatrix} (y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \\ -yx\omega_x + (x^2+z^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z \end{bmatrix}}^{3\times 1} = \overbrace{\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix}}^{3\times 3} \overbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}^{3\times 1}$$

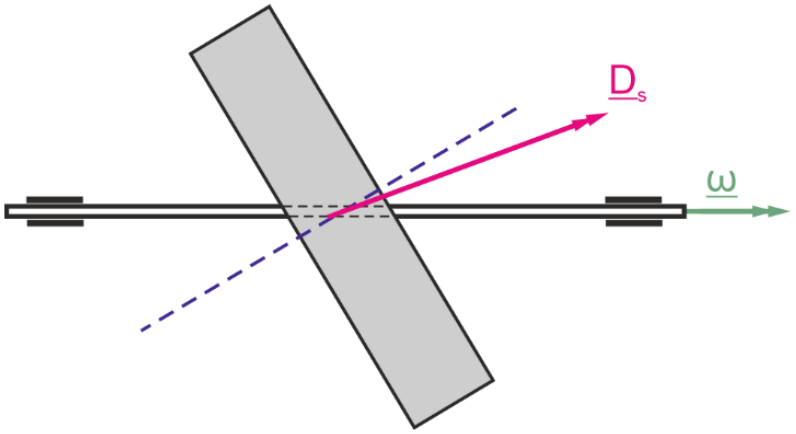
$$\underbrace{\int \underline{r} \times \underline{v}_{PA} dm}_{\underline{D}_A} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int yxdm & \int (z^2+x^2)dm & -\int yzdm \\ -\int zxdm & -\int zydm & \int (x^2+y^2)dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{I}}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\underline{\omega}}$$

$$\underline{D}_A = \underline{\underline{I}}_A\underline{\omega} \qquad [\mathrm{kgm^2s^{-1}}]$$

Für starre Körper gilt also:

$$\boxed{\underline{D}_A = \underline{I}_A \underline{\omega}}$$

Der Drallvektor hat i.A. nicht die Richtung von $\underline{\omega}$, nur dann, wenn die Drehachse gleich TR-Hauptachse (Deviationsmomente=0) ist.



$$\frac{d\underline{D}_A}{dt} + m\underline{r}_{SA} \times \underline{a}_A = \sum \underline{M}_A$$

Ist die Drehachse die z-Achse, dann $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$

$$\underline{D}_A = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{xz}\omega_z \\ -I_{yz}\omega_z \\ I_z\omega_z \end{bmatrix}$$

Ist die Bewegungsebene eine Symmetrieebene des Körpers

$\rightarrow I_{xz}, I_{yz} = 0$

$\rightarrow \underline{D}_A = I_z \omega_z \underline{e}_z$

Ist für A zusätzlich eine der 3 Bedingungen (S.4) erfüllt, dann reduziert sich der DS zu:

$\boxed{I_z \dot{\omega} = M_{R,z}}$ für Bezugspunkt A

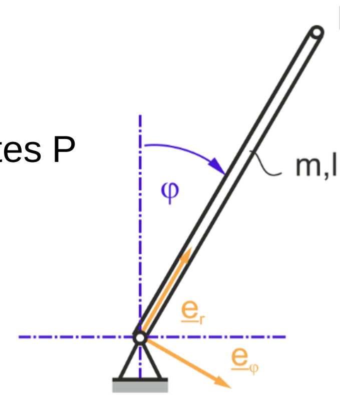
Beispiel: Kippender Stab

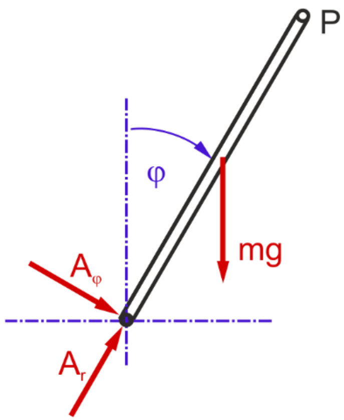
Geg.: *m, l*
Ges.: Geschwindigkeit des Punktes P bei $\varphi=\pi/2$

SS: $-m\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 = A_r - mgcos\varphi$

SS: $m\frac{l}{2}\ddot{\varphi} = A_\varphi + mgsin\varphi$

DS: $I_A\ddot{\varphi} = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$





Da sich der Schwerpunkt auf einer Kreisbahn bewegt, empfiehlt sich die Anwendung von Polarkoordinaten

Bei dynamischen Problemen muss der Körper in allgemeiner Lage gezeichnet werden!

$$I_A = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2l}g\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi}d\varphi = \dot{\varphi}d\dot{\varphi}$$

$$\int\frac{3}{2l}g\sin\varphi\, d\varphi = \int\dot{\varphi}d\dot{\varphi}$$

$$-\frac{3g}{2l}\cos\varphi + C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\dot{\varphi}(\varphi=0) \Rightarrow C = \frac{3g}{2l}$$

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)$$

$$v(\varphi=\pi/2) = l\dot{\varphi} = \sqrt{3gl}$$

Aus den Schwerpunktsätzen folgt:

$$A_r = mgcos\varphi - m\tfrac{l}{2}\dot{\varphi}^2$$

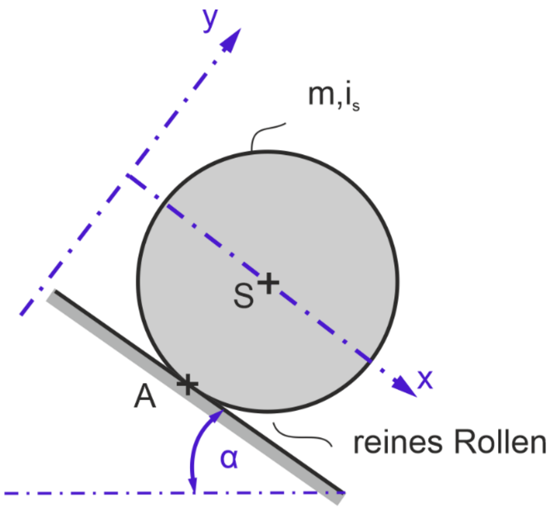
$$A_r = \frac{1}{2}mg(5cos\varphi - 3)$$

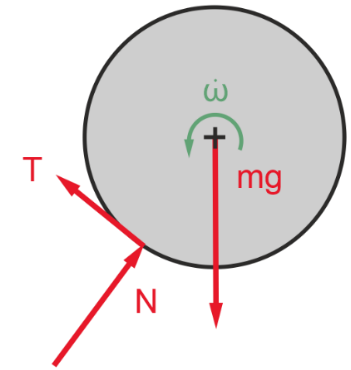
$$A_\varphi = m\tfrac{l}{2}\ddot{\varphi} - mgsin\varphi$$

$$A_\varphi = -\frac{1}{4}mgsin\varphi$$

Beispiel: Rollen auf schiefer Ebene

Geg.: m, i_S, r, α, Reines Rollen
Ges.: Beschleunigung a_S aus der Ruhelage





Wir wählen S als Bezugspunkt:

SS: $m\ddot{x}_S = -T + mgsin\alpha$ (1)

$m\ddot{y}_S = \mathrm{N} - \mathrm{mgcos}\alpha = 0$ (2)

DS: $m{i_S}^2\ddot{\varphi} = -Tr$ (3)

Mit A als Momentanpol (reines Rollen) gilt:

$\dot{x}_S = -\dot{\varphi}r \rightarrow \ddot{x}_S = -\ddot{\varphi}r$ (4)

Solange reines Rollen vorliegt, liegt Haften vor somit ist T eine Bedingungskraft!

Aus (1) mit (3) und (4) folgt: $m\ddot{x}_S = -m{i_S}^2\frac{\ddot{x}_S}{r^2} + mgsin\alpha$

$$\ddot{x}_S = a_S = \frac{gsin\alpha}{1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2}$$

Wir wählen nun A als Bezugspunkt:

DS: $m(i_S^2 + r^2)\ddot{\varphi} = -mgrsin\alpha$

$$\ddot{x}_S = a_M = \frac{gsin\alpha}{1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2}$$

Nun stellt sich die Frage, ob es überhaupt zulässig war reines Rollen anzunehmen.

Aus den Schwerpunktsätzen folgen die Kräfte:

$$\ddot{y}_S = 0 \rightarrow \underline{N = mgcos\alpha} \qquad \underline{T = mgsin\alpha\left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2}\right)}$$

Überprüfen der Haftbedingung:

$$|T| \leq \mu_H |N|$$

$$mgsin\alpha\left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2}\right) \leq \mu_H mgcos\alpha \longrightarrow \underline{\mu_H \geq tan\alpha\left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2}\right)}$$

Solange diese Bedingung erfüllt ist liegt Haften, und somit reines Rollen, vor!

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so besitzt der Punkt A nicht mehr die gleiche Geschwindigkeit wie die Unterlage ($\underline{v}_A \neq \underline{0}$) → der Körper gleitet!

Gleitet der Körper, darf die Rollbedingung nicht mehr zur Generierung einer zusätzlichen Gleichung angewandt werden. Stattdessen findet der Zusammenhang für Gleitreibung Anwendung.

$$T = \mu_G N$$

21.3 Drallsatz im bewegten Koordinatensystem

Zur Erinnerung:

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{\Omega} \times \underline{q}$$

$$\underline{D}_A = \underline{\underline{I}}_A \underline{\omega}$$

Absolute Winkelgeschwindigkeit des Körpers!

Für $\underline{D}_A$ gilt:

$$\boxed{\frac{d\underline{D}_A}{dt} = \frac{\partial \underline{D}_A}{\partial t} + \underline{\Omega} \times \underline{D}_A = \underline{M}_A}$$

Hinweise zur Wahl des KS:

1) Trägheitstensor konstant (d. h. körperfestes KS)

2) Richtung d. Winkelgeschwindigkeitsvektors konstant

3) KS fällt mit TR-Hauptachsen zusammen

Priorität!

Beispiel: rotierende Scheibe

Geg.: $r, d, \alpha, m, \omega = \text{konst.}$

$I_1, I_2 = I_3$

Ges.: Lagerkräfte, A, B (ohne stat. Anteil)

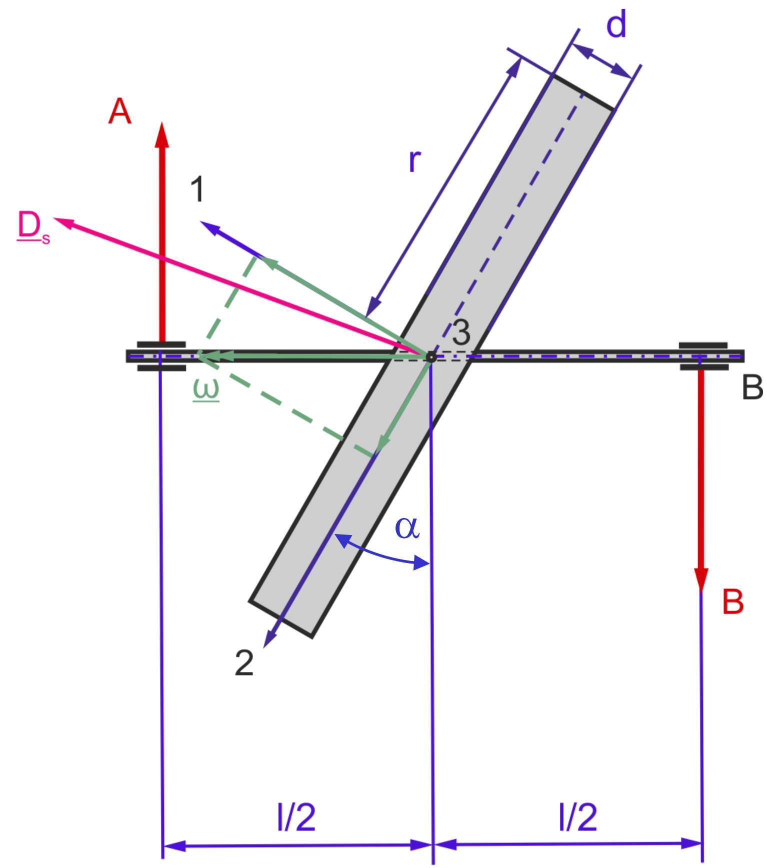
$$\underline{D}_S = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1\omega\cos\alpha \\ I_2\omega\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{D}_S}{\partial t} = \underline{0} \qquad \text{(weil } \dot{\omega} = 0\text{)}$$

$$\frac{d\underline{D}_S}{dt} = \underline{0} + \begin{bmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1\omega\cos\alpha \\ I_2\omega\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - I_1\omega^2\sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = (I_2 - I_1)\,\omega^2 \sin\alpha\,\cos\alpha = -A\frac{\ell}{2} - B\frac{\ell}{2} = -A\ell$$



$$SS: A \equiv B$$

$$\Rightarrow A \equiv B = (I_1 - I_2)\frac{\omega^2}{\ell}\sin\alpha\cos\alpha$$

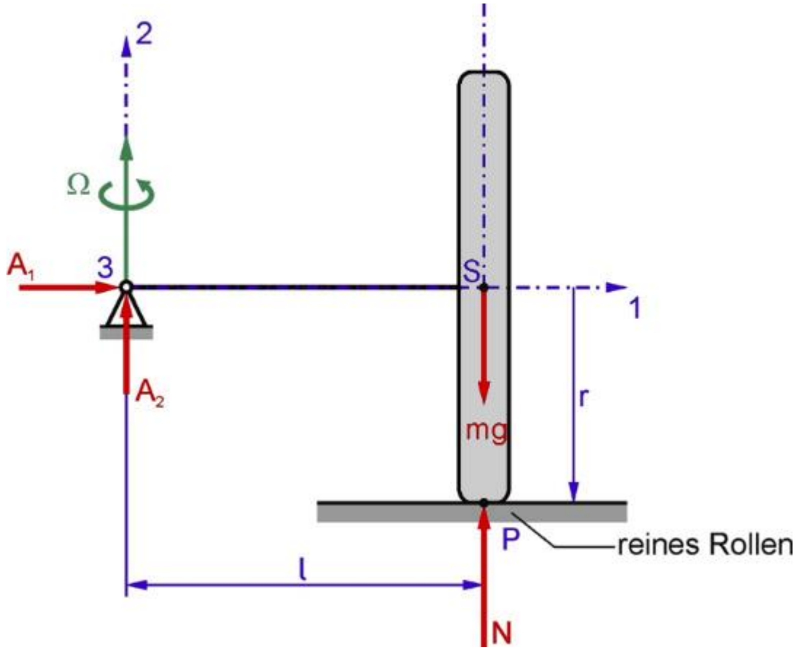
$$[\mathrm{kgm^2s^{-2}m^{-1}} \equiv \mathrm{kgms^{-2}} \equiv \mathrm{N}]$$

Beispiel: Kollergang

Geg.: $\ell,\ r,\ \Omega\ = const.$

$m, I_{S1}, I_{S2} = I_{S3}$

Ges.: N



$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_P = \underline{0} = \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PS} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega\ell - r\omega_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = -\Omega \frac{\ell}{r}$$

Ad Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\underline{v}_S$:

$$\underline{v}_S = \underline{\Omega} \times \underline{r}_{SA} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega\ell \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} -\Omega\,{}^{\ell}/_{r} \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{I}}_A = \begin{bmatrix} I_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{S2} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{S2} + m\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_A = \begin{bmatrix} -I_{S1}\Omega\,{}^{\ell}/_{r} \\ I_{S2}\Omega + m\ell^2\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{D}_A}{\partial t} = \underline{0}$$

$$\frac{d\underline{D}_A}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -I_{S1}\Omega\,{}^{\ell}/_{r} \\ (I_{S2} + m\ell^2)\Omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{S1}\Omega^2\,{}^{\ell}/_{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

$$I_{S1}\Omega^2\,{}^{\ell}/_{r} = M_3 = N\ell - mg\ell \qquad \Rightarrow N = mg + I_{S1}\frac{\Omega^2}{r} \qquad [\mathrm{kgm^2s^{-2}m^3}] \qquad [= \mathrm{N}]$$

Offensichtlich wird die Normalkraft mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit größer!