20. Schwerpunktsatz

20.1 Historische Grundlagen

20.1.1 Trägheitsgesetz Galilei (1564-1642)

Es gibt Bezugssysteme (Inertialsysteme) , in denen sich alle starren Körper, die in beliebige Richtungen translatorisch in Bewegung gesetzt und dann kräftefrei belassen werden, so bewegen, dass alle Körperpunkte relativ zu diesem Bezugssystem gerade Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit beschreiben.

20.1.2 Newtonsche Axiome

Lex prima (Trägheitsaxiom):
„Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmiger Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird“

Lex secunda:
„Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“

Lex tertia (Reaktionsaxiom):
„Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).“

Orginaltext der Newton‘schen Axiome (Quelle: Principia Mathematica):

Lex prima:
„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.“

Lex secunda:
„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.“

Lex tertia:
„Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“

Ein Axiom ist ein nicht deduktiv abgeleiteter Grundsatz einer Theorie (Wissenschaft, eines axiomatischen Systems).

20.2 Dynamisches Grundgesetz

Definition: Impuls $\underline{p} = \int \underline{v}\, dm$

Massenmittelpunkt: $\underline{r}_M = \frac{1}{m}\int \underline{r} dm$ für $m = const.$ $\underline{v}_M = \frac{1}{m}\int \underline{v} dm$

$$\Rightarrow \underline{p} = \int \underline{v}\, dm = m\underline{v}_M \rightarrow \frac{d\underline{p}}{dt} = m\underline{a}_M$$

Gemäß Newtons lex secunda gilt: $\boxed{\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F}}$ alle zeitlichen Änderungen sind auf das Inertialsystem bezogen!!!

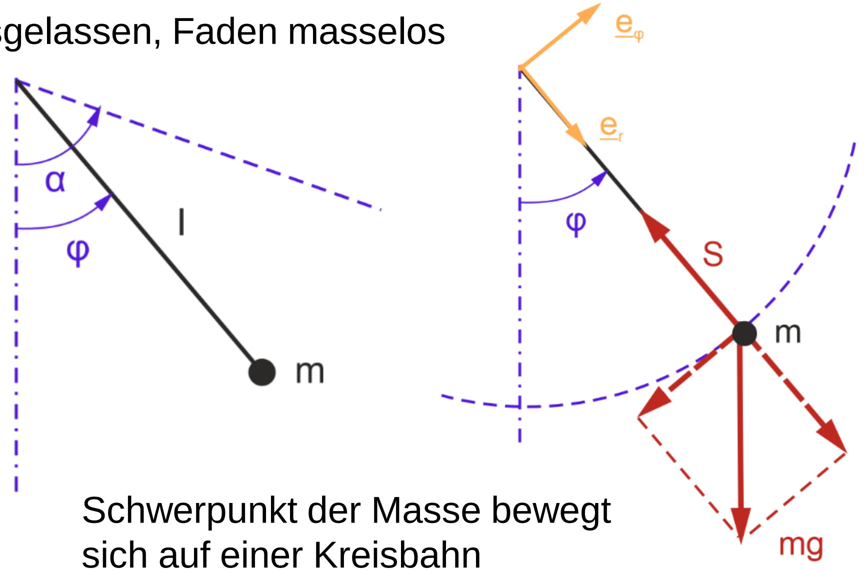
für $m = const.$ $\boxed{m\underline{a}_M = \underline{F}}$ Kinetische Grundgleichung der klassischen Mechanik

- gilt für beliebige Massenverteilungen
- $\underline{F}$…Summe aller äußeren Kräfte (das gilt es noch zu beweisen, siehe S. 7)
- $\underline{a}_M$ ...Beschleunigung des Massenmittelpunkts im Inertialsystem

Beispiel: Fadenpendel

Ein Fadenpendel wird von dem Winkel α losgelassen, Faden masselos

Geg.: ℓ, m, α
Ges.: $v(\varphi), S(\varphi)$, v_{max}, S_{max}



$$\underline{e}_r:\ \ ma_r = -S + mg\cos\varphi$$

$$\underline{e}_\varphi:\ \ ma_\varphi = -mg\sin\varphi$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

Schwerpunkt der Masse bewegt sich auf einer Kreisbahn →Polarkoordinaten

$$-m\ell\dot{\varphi}^2 = -S + mg\cos\varphi$$

$$m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

zeitfreie Gleichung: $\ddot{\varphi}\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}$

$$\int -\frac{g}{\ell}\sin\varphi\, d\varphi = \int \dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi} \qquad \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{\ell}cos\varphi + C \qquad \text{AB: } \dot{\varphi}(\varphi = \alpha) = 0 \qquad \Rightarrow C = -\frac{g}{\ell}\cos\alpha$$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{2\frac{g}{\ell}(\cos\varphi - \cos\alpha)} \qquad \underline{v(\varphi) = \ell\dot{\varphi} = \sqrt{2g\ell(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$$

$$\underline{S(\varphi)} = mg\cos\varphi + m\ell\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi + m\ell 2\frac{g}{\ell}(\cos\varphi - \cos\alpha) = \underline{mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha)}$$

Nun sollen noch die maximale Geschwindigkeit und die maximale Fadenkraft ermittelt werden. Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel haben wir bereits hergeleitet.

$$v(\varphi) = \ell\dot{\varphi} = \sqrt{2g\ell(\cos\varphi - \cos\alpha)}$$

Dazu ist es notwendig zu wissen, bei welchem Winkel φ die Geschwindigkeit maximal wird?

$$\underline{v(\varphi = 0) = v_{max} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)}}$$

Auch die Fadenkraft in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel haben wir bereits hergeleitet.

$$S(\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha)$$

Auch hier stellt sich wieder die Frage, bei welchem Winkel die Seilkraft maximal wird?

$$\underline{S(\varphi = 0) = S_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha)}$$

Dynamisches Grundgesetz für ein Massenelement $\mathrm{d}m$:

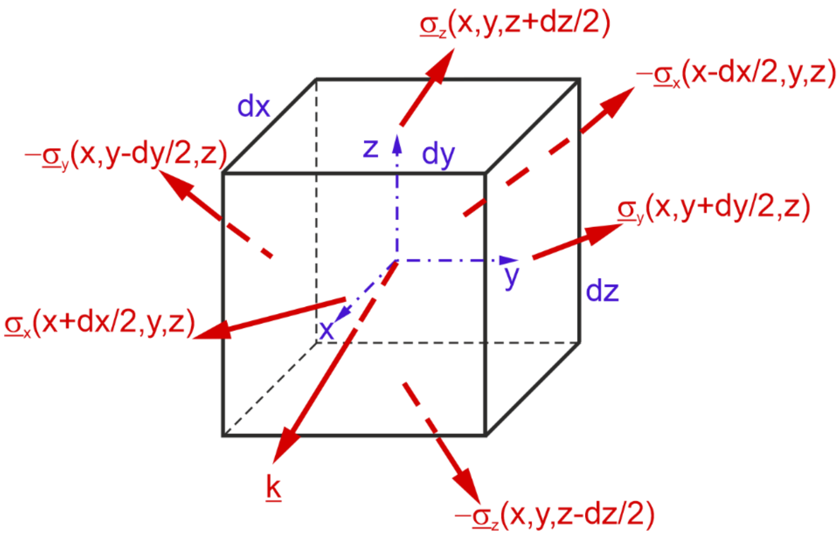
$$dm\underline{a} = d\underline{F} \qquad |: dV$$

$$\boxed{\rho\underline{a} = \underline{f}}$$

$\underline{f}$…Kraftdichte in N/m³

$$\rightarrow \rho(x,y,z,t)\cdot\underline{a}(x,y,z,t) = \underline{f}(x,y,z,t)$$

$$dV = dxdydz$$



$$\underline{\sigma}_x\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right) \approx \underline{\sigma}_x(x,y,z) + \frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$-\underline{\sigma}_x\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right) \approx -\underline{\sigma}_x(x,y,z) + \frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$ etc…

$$d\underline{F} = \underline{k}dxdydz + \left(\frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x}dx\right)dydz + \left(\frac{\partial\underline{\sigma}_y}{\partial y}dy\right)dzdx + \left(\frac{\partial\underline{\sigma}_z}{\partial z}dz\right)dxdy \qquad | : dV$$

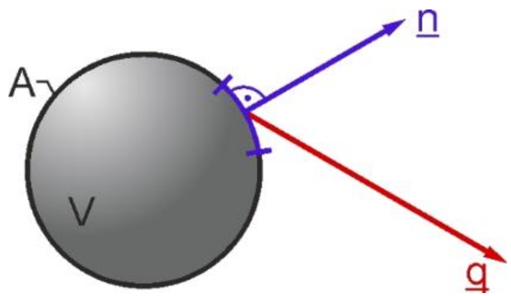
$$\rightarrow \frac{d\underline{F}}{dV} = \boxed{\underline{f} = \underline{k} + \frac{\partial\underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\underline{\sigma}_z}{\partial z}}$$

Einsetzen in das dynamische Grundgesetz liefert:

$$\boxed{\rho\underline{a} = \underline{k} + \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z}}$$

Dies ist das dynamische Grundgesetz für ein Massenelement

$$\rho\underline{a} = \underline{k} + \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}$$



$$\underbrace{\int_V \rho\underline{a}\,dV}_{\displaystyle\underbrace{\int_m \underline{a}\,dm}_{m\underline{a}_M}} = \underbrace{\int_V \underline{k}\,dV}_{\displaystyle\underline{K}} + \underbrace{\int_V \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z}\,dV}_{\displaystyle\underbrace{\oint_A \big(\underbrace{\underline{\sigma}_x n_x + \underline{\sigma}_y n_y + \underline{\sigma}_z n_z}_{\underline{\sigma}_n}\big)\,dA}_{\underline{F}_{Oberfläche}}}$$

Gaußscher Integralsatz:

$$\int_V \frac{\partial \underline{q}}{\partial x}\,dV = \oint_A \underline{q}\,n_x dA \qquad \underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Analog für y, z

$\underline{K}$...Volumenskraft (Eigengewicht, mag. Kräfte,…)

$\underline{\sigma}_n$…Traction-Vektor

$$\underline{K} + \underline{F}_{Oberfläche} = \underline{R}$$

$\underline{R}$…Resultierende aller äußeren Kräfte

$$\boxed{m\underline{a}_M = \underline{R}}$$

Schwerpunktsatz gilt für beliebige Masseverteilung (Voraussetzung: m=const.)

gilt auch für deformierbare Körper