

19. Massenmomente 2.Grades

19.1 Massenträgheitsmoment, Massendeviationsmoment

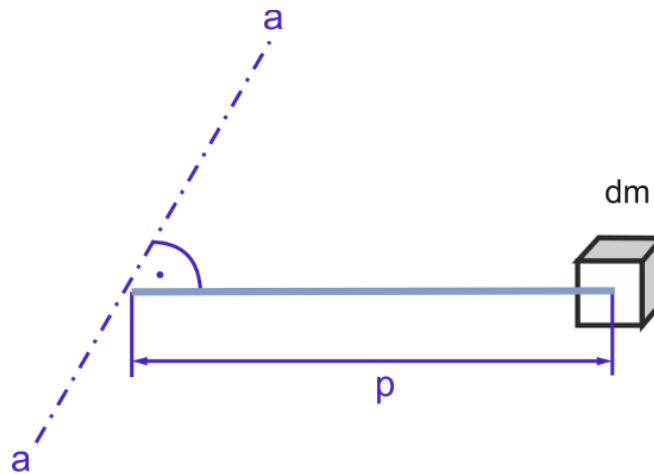
Definition:

$$I_a = \int_m p^2 dm$$

$[I_a] = \text{kgm}^2 \dots$ Massenträgheitsmoment (MTRM) “Inertia” (Trägheit) stets > 0

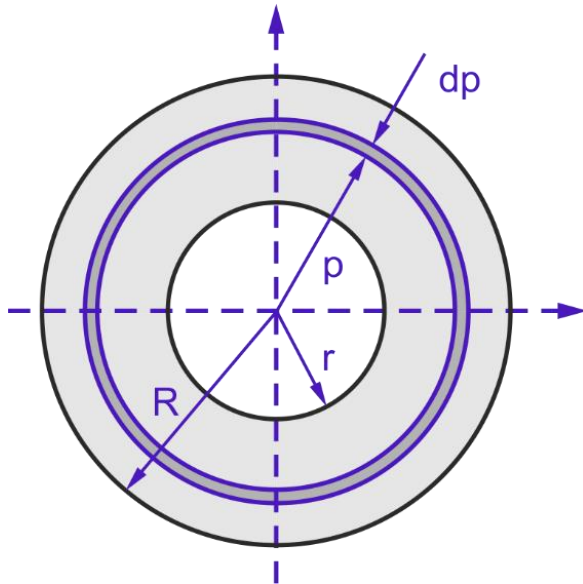
$$I_a = m i_a^2$$

$[i_a] = \text{m} \dots$ Trägheitsradius



Beispiel: homogener Hohlzylinder, Länge l

Ges.: MTRM bezüglich der Zylinderachse



$$I_a = \int_m p^2 dm$$

$$dm = \frac{2p\pi l dp \rho}{dV}$$

$$I_a = \int_r^R p^2 2p\pi l \rho dp = 2\pi \rho l \int_r^R p^3 dp = \frac{2}{4} \pi \rho l (R^4 - r^4)$$

$$I_a = \frac{1}{2} \underbrace{\pi \rho l (R^2 - r^2)}_m (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$$

Für Vollzylinder: $r = 0$

$$I_a = \frac{1}{2} m R^2 \quad i_a = \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

Für $r = R$:

$$I_a = m R^2$$

19.1.1 Massenmomente bezüglich der Koordinationsachsen

Trägheitsmomente in einem kartesischen Koordinatensystem:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Deviationsmoment bezüglich zweier orthogonaler Ebenen:

Definition:

$$I_{pq} = \int_m pq dm$$

$[I_{pq}] = \text{kgm}^2$ können ≤ 0 sein

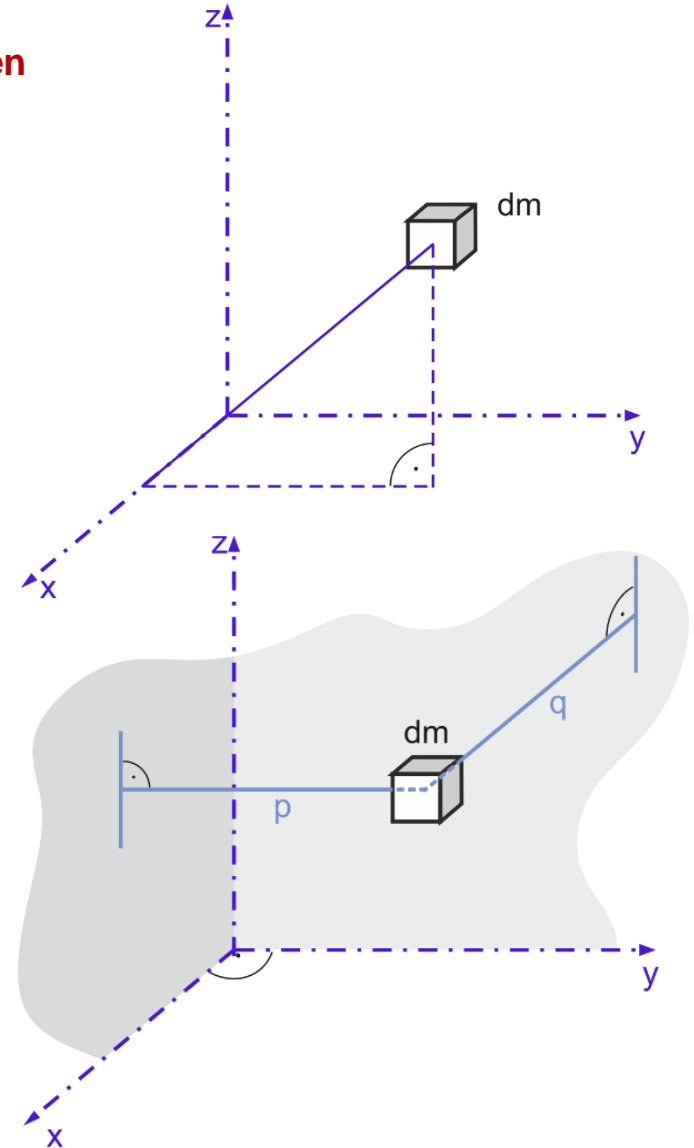
$$I_{xy} = \int xy dm = I_{yx}$$

$$I_{yz} = \int yz dm = I_{zy}$$

$$I_{zx} = \int zx dm = I_{xz}$$

19.1.2 Trägheitstensor:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$



19.2 Massenmomente für parallelverschobene Achsen

Voraussetzung: SP im Koordinatenursprung

$$x = a + \xi \quad y = b + \eta \quad z = c + \zeta$$

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \int (\eta^2 + \zeta^2) dm = \int [(y - b)^2 + (z - c)^2] dm = \\ &= \int [y^2 - 2yb + b^2 + z^2 - 2zc + c^2] dm = \\ &= \underbrace{\int (y^2 + z^2) dm}_{I_x} + \underbrace{\int (b^2 + c^2) dm}_{+(b^2 + c^2)m} - 2b \int y dm - 2c \int z dm \\ &= I_x + h^2 m \end{aligned}$$

$$I_{\xi} = I_x + h^2 m$$

$$I_{\eta} = I_y + k^2 m$$

$$I_{\zeta} = I_z + l^2 m$$

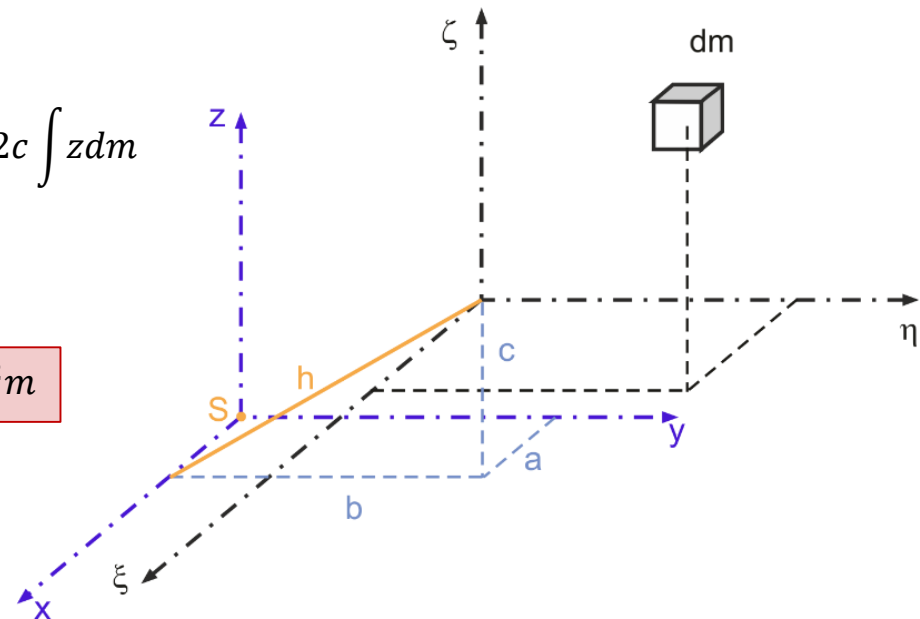
$h, k, l \dots$ Normalabstände der parallelen Achsen

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= \int \xi\eta dm = \int (x - a)(y - b) dm = \\ &= \int (xy - ay - bx + ab) dm = \int xy dm - a \int y dm - b \int x dm + ab \int dm \end{aligned}$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + abm$$

$$I_{\eta\zeta} = I_{yz} + bcm$$

$$I_{\zeta\xi} = I_{zx} + cam$$



19.3 Trägheitstensor für verdrehte Koordinatenachsen

19.3.1 Trägheitsmoment um verdrehte Achsen

$$I_a = \int p^2 dm \quad |\underline{r} \times \underline{n}| = |\underline{r}| |\underline{n}| \sin\varphi = p \quad |\underline{n}| = 1$$

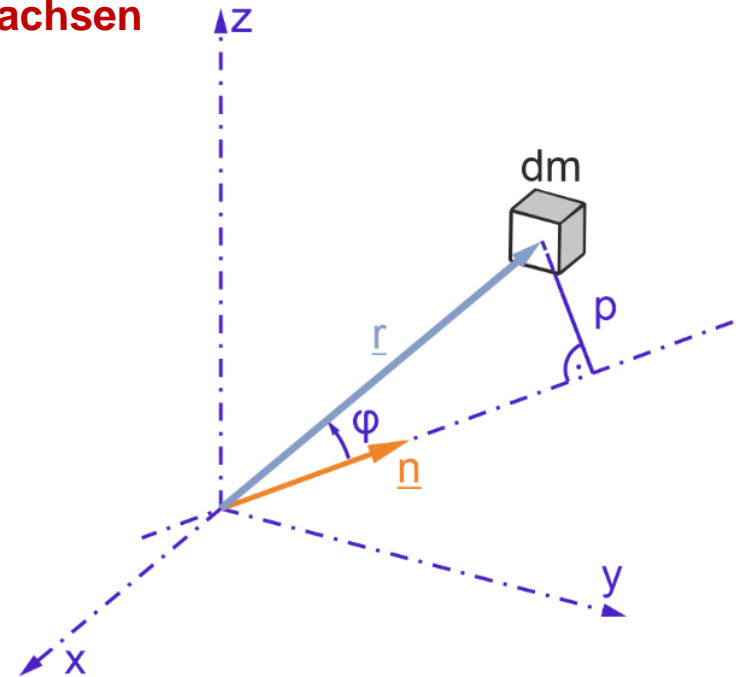
$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \underline{r} \times \underline{n} = \begin{bmatrix} yn_z - zn_y \\ zn_x - xn_z \\ xn_y - yn_x \end{bmatrix}$$

$$(\underline{r} \times \underline{n})^2 = (yn_z - zn_y)^2 + (zn_x - xn_z)^2 + (xn_y - yn_x)^2$$

$$\begin{aligned} I_n = \int_m p^2 dm &= n_x^2 \underbrace{\int (y^2 + z^2) dm}_{I_x} + n_y^2 \underbrace{\int (z^2 + x^2) dm}_{I_y} + n_z^2 \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{I_z} \\ &\quad - 2n_x n_y \underbrace{\int xy dm}_{I_{xy}} - 2n_y n_z \underbrace{\int yz dm}_{I_{yz}} - 2n_z n_x \underbrace{\int zx dm}_{I_{zx}} \end{aligned}$$

$$I_n = n_x^2 I_x + n_y^2 I_y + n_z^2 I_z - 2n_x n_y I_{xy} - 2n_y n_z I_{yz} - 2n_z n_x I_{zx}$$

oder: $I_n = \underline{n}^T \underline{I} \underline{n}$



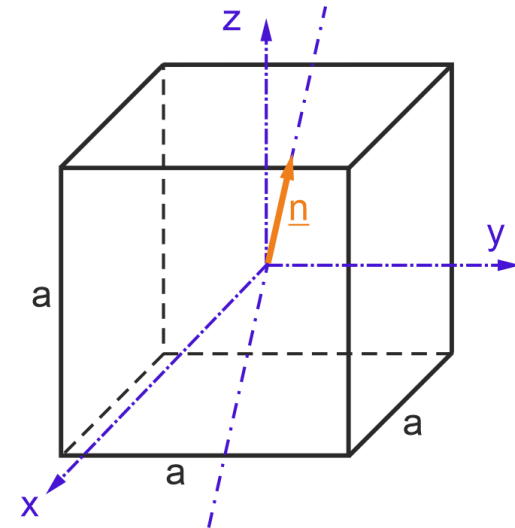
Beispiel: Würfel

$$dm = \rho \, dx dy dz$$

$$I_y = I_z = I_x = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \frac{a^5}{6} = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_n = \frac{ma^2}{6} \underbrace{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}_{=1} = \frac{ma^2}{6}$$

Würfel verhält sich trägheitsmäßig wie eine Kugel, d.h. beim Würfel sind die Trägheitsmomente invariant gegenüber Verdrehung des KS.



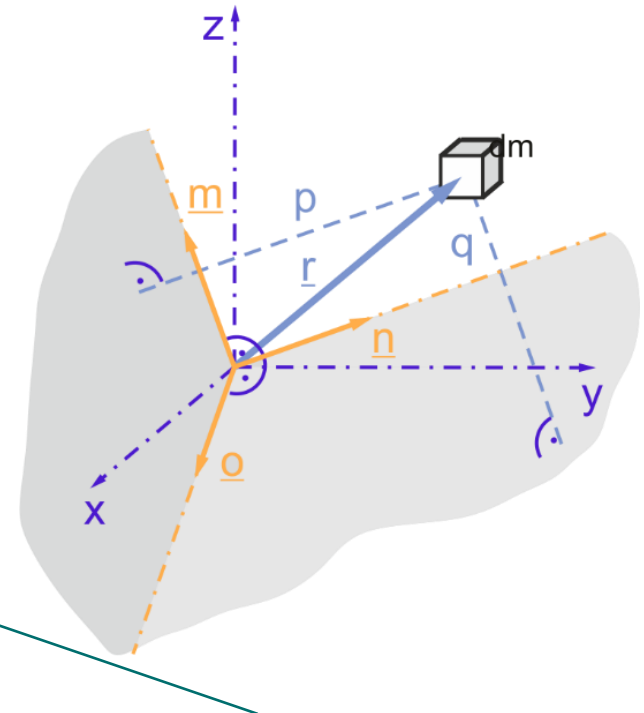
19.3.1 Deviationsmoment um verdrehte Achsen

$$I_{nm} = I_{pq} = \int_m p q dm$$

$$p = \underline{r} \cdot \underline{n}$$

$$q = \underline{r} \cdot \underline{m}$$

$$\begin{aligned} p q &= (\underline{r} \cdot \underline{n})(\underline{r} \cdot \underline{m}) = (x n_x + y n_y + z n_z)(x m_x + y m_y + z m_z) = \\ &= x^2 n_x m_x + y^2 n_y m_y + z^2 n_z m_z + xy(n_x m_y + n_y m_x) \\ &\quad + yz(n_y m_z + n_z m_y) + zx(n_z m_x + n_x m_z) \end{aligned}$$



$$\underline{n} \perp \underline{m} \rightarrow \underline{n} \cdot \underline{m} = 0, \quad \text{d.h.: } n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z = 0$$

somit ändert Hinzufügen von $-(x^2 + y^2 + z^2)(n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z)$ nichts am obigen Ausdruck:

$$\begin{aligned} p q &= -n_x m_x (y^2 + z^2) - n_y m_y (z^2 + x^2) - n_z m_z (x^2 + y^2) + \\ &\quad + (n_x m_y + n_y m_x) xy + (n_y m_z + n_z m_y) yz + (n_z m_x + n_x m_z) zx \end{aligned}$$

also:

$$I_{nm} = -n_x m_x I_x - n_y m_y I_y - n_z m_z I_z + (n_x m_y + n_y m_x) I_{xy} + (n_y m_z + n_z m_y) I_{yz} + (n_z m_x + n_x m_z) I_{zx}$$

Abkürzend lässt sich das auch so schreiben:

$$-I_{nm} = \underline{m}^T \underline{I} \underline{n} = \underline{n}^T \underline{I} \underline{m} = -I_{mn}$$

19.4 Trägheitshauptachsen

Gesucht werden nun jene Koordinatenrichtungen \underline{n} , für welche die Deviationsmomente I_{nm} verschwinden. Das ist dann der Fall wenn $\underline{I} \underline{n}$ in die Richtung von \underline{n} weist und daher normal zu \underline{m} ist. Das führt auf das folgende **Eigenwertproblem**:

$$\underline{I} \underline{n} - \lambda \underline{n} = \underline{0} \rightarrow (\underline{I} - \lambda \underline{I}) \underline{n} = \underline{0}$$

Das Eigenwertproblem hat nur dann nicht-triviale Lösungen für \underline{n} , wenn

$$\det(\underline{I} - \lambda \underline{I}) = 0, \quad \text{wobei } \underline{I} \text{ die Einheitsmatrix ist}$$

oder ausgeschrieben:

$$\det \begin{pmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y - \lambda & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Das führt auf eine Gleichung 3. Grades in λ . Aufgrund der Symmetrie des Trägheitstensors liefert diese Gleichung 3 reelle Lösungen, die **Eigenwerte** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Sie werden in weiterer Folge **Hauptträgheitsmomente** I_1, I_2, I_3 genannt. Sie werden üblicherweise der Größe nach im Trägheitstensor angeordnet, wobei $I_1 > I_2 > I_3$.

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Die den Eigenwerten zugeordneten Eigenvektoren $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ (in weiterer Folge als $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) werden als **Trägheitshauptachsen** bezeichnet. Sie formen ein **orthogonales Dreibein** und somit die Basisvektoren eines Koordinatensystems, für welches die Deviationsmomente verschwinden.

$I_1, I_2, I_3 \dots$ Hauptträgheitsmomente

$\underline{e}_1 \perp \underline{e}_2 \perp \underline{e}_3 \dots$ Trägheitshauptachsen

Man findet die Trägheitshauptachsen auch dann, wenn man jene Richtungen \underline{n} sucht, für welche die Trägheitsmomente einen Extremwert annehmen, also:

Finde n_x, n_y, n_z sodass

$$I_n = n_x^2 I_x + n_y^2 I_y + n_z^2 I_z - 2n_x n_y I_{xy} - 2n_y n_z I_{yz} - 2n_z n_x I_{zx} \rightarrow \text{Extremum}$$

unter der Nebenbedingung, dass $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

Die Extremwertaufgabe wird nach Einführung von Lagrangemultiplikatoren λ und Ableiten auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} n_x I_x - n_y I_{xy} - n_z I_{xz} - \lambda n_x &= 0 \\ -n_x I_{yx} + n_y I_y - n_z I_{yz} - \lambda n_y &= 0 \\ -n_x I_{zx} - n_y I_{zy} - n_z I_z - \lambda n_z &= 0 \end{aligned}$$

Das lässt sich abgekürzt auch so schreiben: $\underline{I} \underline{n} - \lambda \underline{n} = \underline{0}$
Wie erhalten also wieder das zuvor gezeigte Eigenwertproblem.

Die gesuchten Extremwerte sind also:

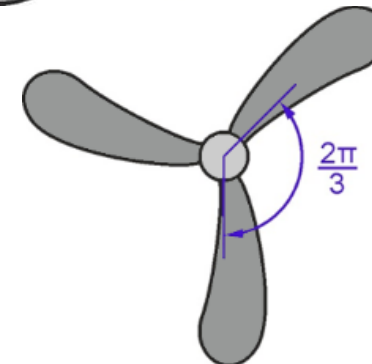
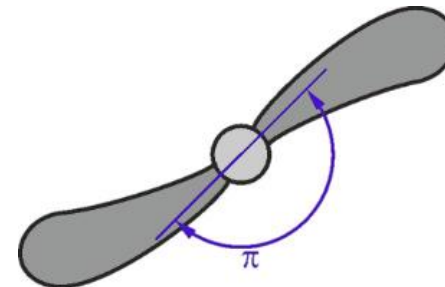
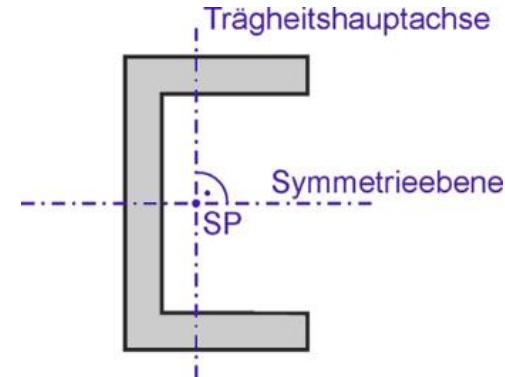
$I_1 \dots \text{max TRM}$

$I_2 \dots \text{Sattelpunkt}$

$I_3 \dots \text{min TRM}$

Bei gewissen Geometrien ist die Lage der Trägheitshauptachsen a-priori erkennbar:

- Hat man eine Symmetrieebene identifiziert, dann ist die Normale auf diese Ebene durch den SP automatisch ein TR-Hauptachse.
- Kann man einen Körper durch Rotation um eine Achse um den Winkel π in sich selbst überführen, dann ist diese Achse eine Trägheitshauptachse
- Gelingt das schon für kleinere Winkel $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, dann wird aus dem Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid (siehe 19.5)



Im Zusammenhang mit rotierenden Körpern treten zwei wichtige Begriffe auf:

- **Statisches Auswuchten:** Ein Körper ist statisch ausgewuchtet, wenn sein Schwerpunkt auf der Drehachse liegt.
- **Dynamisches Auswuchten:** Ein Körper ist dynamisch ausgewuchtet, wenn die Drehachse eine Trägheitshauptachse ist. Somit ist er automatisch auch statisch ausgewuchtet, da Trägheitshauptachsen immer durch den Schwerpunkt gehen.

19.5 Trägheitsellipsoid

- Berechne für beliebige $\underline{n} \rightarrow I_n$
- Trage auf \underline{n} die Strecke $\overline{AP} = |\underline{r}_P| = \frac{k}{\sqrt{I_n}}$ ab
- Suche den geometrischen Ort aller Punkte P

$$n_x = \frac{x}{r_p} \quad n_y = \frac{y}{r_p} \quad n_z = \frac{z}{r_p} \quad \underline{r}_P = r_p \cdot \underline{n} \quad \underline{r}_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$I_n = \frac{k^2}{r_p^2} = \frac{x^2}{r_p^2} I_x + \frac{y^2}{r_p^2} I_y + \frac{z^2}{r_p^2} I_z - 2 \frac{xy}{r_p^2} I_{xy} - 2 \frac{yz}{r_p^2} I_{yz} - 2 \frac{zx}{r_p^2} I_{zx}$$

$$k^2 = x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z - 2xy I_{xy} - 2yz I_{yz} - 2zx I_{zx} \quad \dots \text{Trägheitsellipsoid}$$

Transformation auf Hauptachsen liefert:

$$I_1 \xi^2 + I_2 \eta^2 + I_3 \zeta^2 = k^2$$

