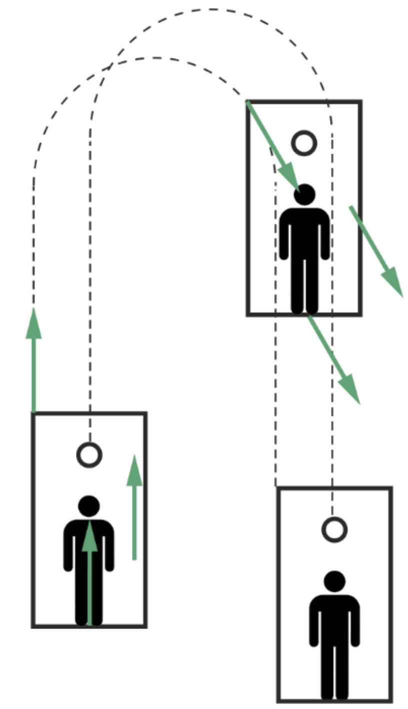
18. Kinematik des starren Körpers

18.1 Grundlegende Zusammenhänge

6 Freiheitsgrade (degrees of freedom - DOF)
definieren die Lage eines Körpers im Raum:

3 Koordinaten eines Punktes

3 Winkel (z. B.: Eulersche Drehwinkel)



- Translation
  - geradlinig
  - krummlinig
- Rotation

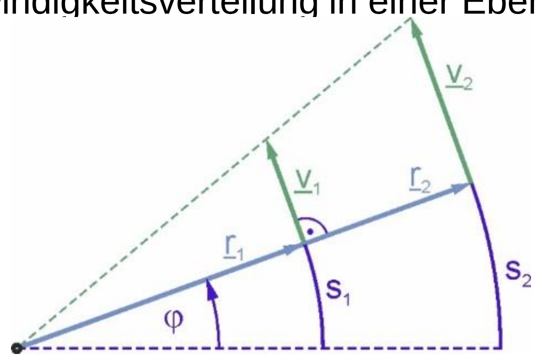
Die Rotation ergibt folgende Geschwindigkeitsverteilung in einer Ebene $\perp$ Drehachse:

$$s_1 = r_1 \varphi$$

$$s_2 = r_2 \varphi$$

$$v_1 = \dot{s}_1 = r_1 \dot{\varphi} \;, \qquad v_2 = r_2 \dot{\varphi}$$

$$\boxed{v = r\dot{\varphi}}$$



$$\underline{r}_P = \underline{r}_A + \underline{r}_{PA}$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{v}_{PA}$$

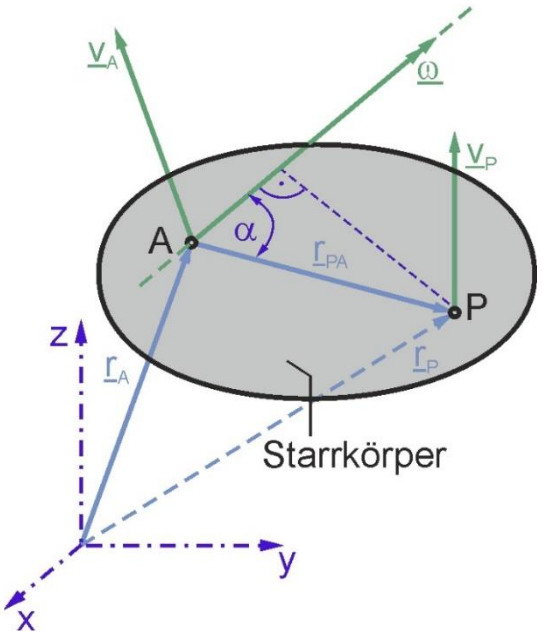
$$\underline{v}_{PA} = \frac{d}{dt}\underline{r}_{PA}$$

$$\underline{r}_{PA} \cdot \underline{r}_{PA} = \underline{r}_{PA}^{\;2} = const$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}_{PA} \cdot \underline{r}_{PA}) = 2\underline{v}_{PA} \cdot \underline{r}_{PA} = 0$$

$$\underline{v}_{PA} \perp \underline{r}_{PA} \rightarrow \underline{v}_{PA} = \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}$$

$\underline{\omega}$… Winkelgeschwindigkeitsvektor



Beweis:

$$|\underline{v}_{PA}| = |\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}| = |\underline{\omega}|\underbrace{|\underline{r}_{PA}|\sin\alpha}$$

Normalabstand zur Drehachse

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}}$$

Fundamentaler Zusammenhang der Starrkörperkinematik

generell gilt:

$$\dot{\underline{e}} = \frac{d\underline{e}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{e}$$

noch allgemeiner:

$$\boxed{\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{\omega} \times \underline{q}}$$

Herleitung siehe Mechanik II

$$\underline{a}_P = \underline{a}_A + \frac{d}{dt}(\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA})$$

$$\boxed{\underline{a}_P = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{PA} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA})}_{\underline{\dot{r}}_{PA}}}$$

Entwicklungssatz: $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$

$$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) = \underline{\omega}(\underline{\omega} \cdot \underline{r}_{PA}) - \underline{r}_{PA}(\underline{\omega} \cdot \underline{\omega})$$

Für den Fall, dass

$$\underline{r}_{PA} \perp \underline{\omega} \rightarrow \underline{r}_{PA} \cdot \underline{\omega} = 0$$

also

$$\boxed{\underline{a}_P = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{PA} - \omega^2 \underline{r}_{PA}}$$

Für Bewegungen in der Ebene ist diese Bedingung auf jeden Fall erfüllt.

Bei Rotation um eine feste Achse gilt:

$\underline{a}_{PA,t} = \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{PA}$ $\rightarrow$ Tangentialbeschleunigung

$\underline{a}_{AP,n} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA})$ $\rightarrow$ Zentripetalbeschleunigung

$$\underline{a}_P = \underline{a}_A + \underline{a}_{PA,t} + \underline{a}_{PA,n}$$

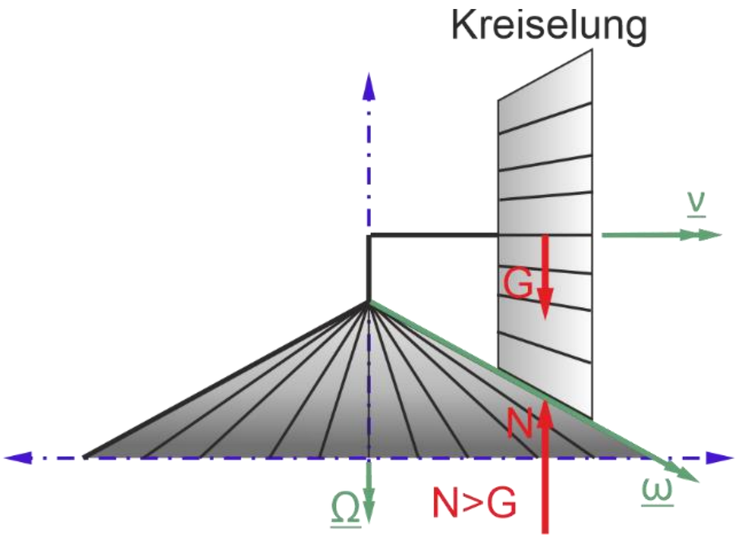
Sphärische Bewegung

(die Drehachse ändert sich ständig)

Formal gelten die gleichen Beziehungen, aber

- $\underline{\omega}$ ist nicht körperfest, auch nicht fest im Bezugssystem
- $\underline{\dot{\omega}}$ ist nicht parallel zu $\underline{\omega}$
- die Aufteilung von $\underline{a}$ in $\underline{a}_t$ und $\underline{a}_n$ entspricht nicht dem Fall der festen Drehachse

Beispiel: Kollergang



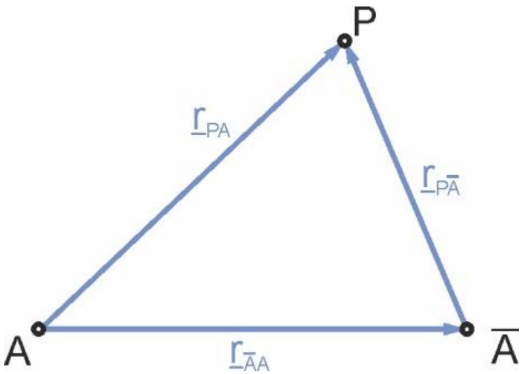
Anderer Punkt als Bezugspunkt:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA} = \underline{v}_{\bar{A}} + \underline{\bar{\omega}} \times \underline{r}_{P\bar{A}}$$

$$\underline{r}_{PA} = \underline{r}_{\bar{A}A} + \underline{r}_{P\bar{A}} \qquad \underline{v}_{\bar{A}} = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{\bar{A}A}$$

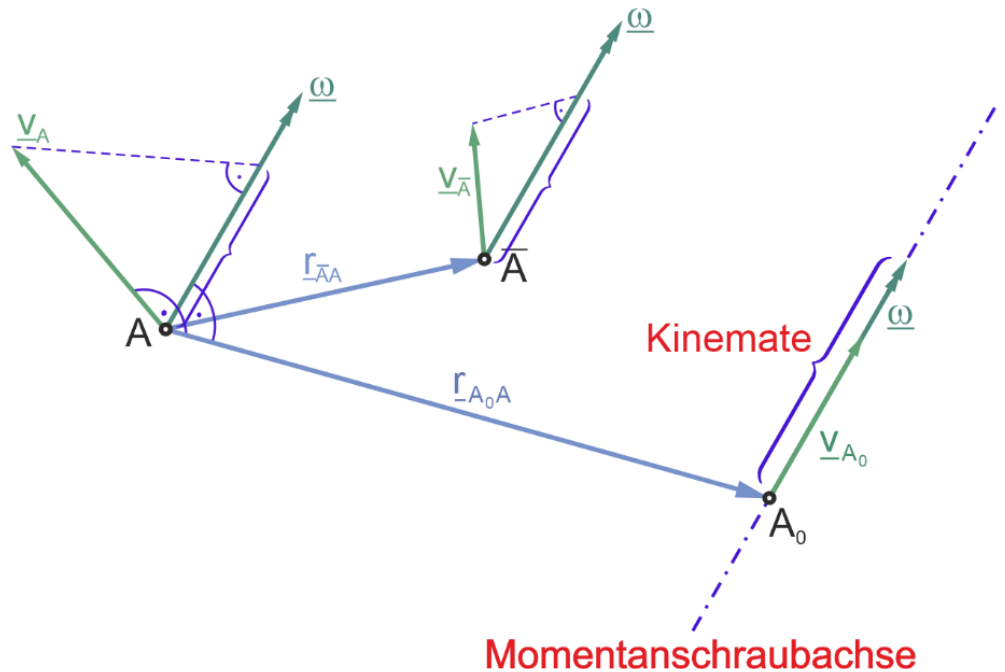
$$\underline{v}_A + \underline{\omega} \times (\underline{r}_{\bar{A}A} + \underline{r}_{P\bar{A}}) = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{\bar{A}A} + \underline{\bar{\omega}} \times \underline{r}_{P\bar{A}}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA} = \underline{\bar{\omega}} \times \underline{r}_{P\bar{A}} \Rightarrow \underline{\omega} = \underline{\bar{\omega}}$$



Die Winkelgeschwindigkeit des Starrkörpers ist also unabhängig vom Bezugspunkt!

Der momentane Geschwindigkeitszustand lässt sich durch eine Drehung um die Momentanschraubachse und Verschiebung in Richtung dieser Achse beschreiben (Analogie zur Dyname!)



Man findet den Punkt A_0 mit

$$\underline{r}_{A_0A} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{|\underline{\omega}|^2}$$

18.2 Ebene Bewegung des starren Körpers

18.2.1 Geschwindigkeitspol

Ein in der Ebene beweglicher Körper besitzt 3 Freiheitsgrade (DOF) x, y, φ

Alle Geschwindigkeiten und Beschleunigungen liegen in dieser Ebene

$\underline{\omega}, \underline{\dot{\omega}}$ sind normal auf die Ebene (x, y −Ebene)

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$$

$$\underline{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \underline{e}_z$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA} = \underline{v}_A + \omega \underbrace{\underline{e}_z \times \underline{r}_{PA}}_{\underline{\hat{r}}_{PA}}$$

$$\underline{\hat{r}}_{PA} \perp \underline{r}_{PA} \qquad |\underline{\hat{r}}_{PA}| = |\underline{r}_{PA}|$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \omega \underline{\hat{r}}_{PA}$$

Gibt es einen Punkt G in der Ebene, der momentan die Geschwindigkeit = 0 besitzt?
Wo ist dieser Punkt?

$$\underline{e}_z \times \left| \quad \underline{v}_G = \underline{v}_A + \omega \underline{e}_z \times \underline{r}_{GA} \overset{!}{=} \underline{0} \right. \qquad \underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) = \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$$

$$\underline{0} = \underline{e}_z \times \underline{v}_A + \underline{e}_z \times (\omega \underline{e}_z \times \underline{r}_{GA}) = \underline{e}_z \times \underline{v}_A + \omega \left(\underline{0} - \underline{r}_{GA}\right) = \underline{e}_z \times \underline{v}_A - \omega\, \underline{r}_{GA}$$

$$\underline{r}_{GA} = \frac{1}{\omega}(\underline{e}_z \times \underline{v}_A)$$

$$\underline{r}_G = \underline{r}_A + \frac{1}{\omega}(\underline{e}_z \times \underline{v}_A)$$

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left. \begin{aligned} x_G &= x_A - \frac{\dot{y}_A}{\omega} \\ y_G &= y_A + \frac{\dot{x}_A}{\omega} \end{aligned} \right\}$$

Koordinaten des Punktes G

$\downarrow$

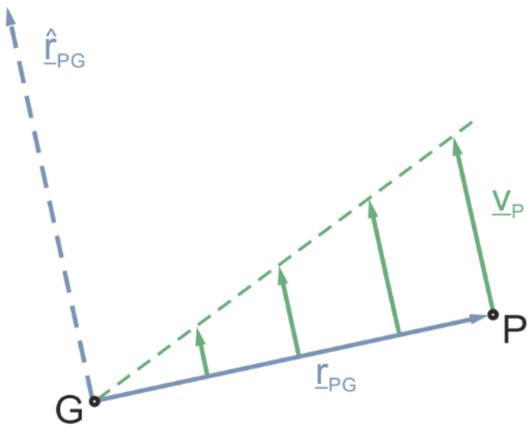
G… Geschwindigkeitspol = Momentanpol

Jede ebene Bewegungsänderung eines starren Körpers lässt sich als eine Rotation um seinen Geschwindigkeitspol auffassen.

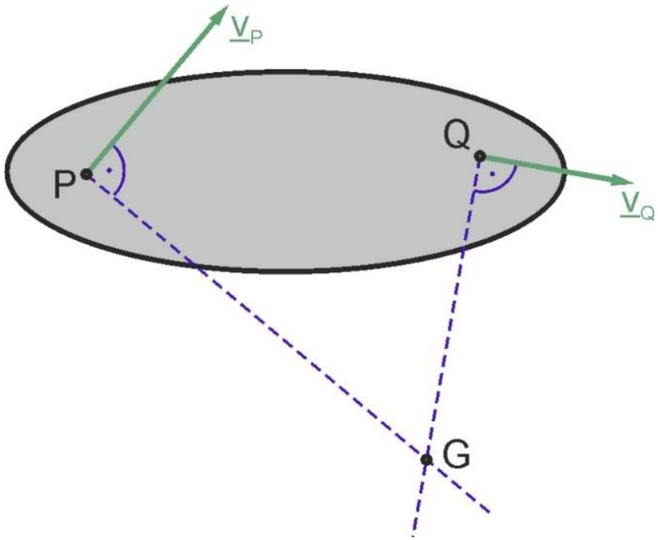
Der Geschwindigkeitspol (Momentanpol) ist das momentane Drehzentrum der ebenen Bewegung (i.a. Beschleunigung von G ≠ 0 !)

Graphische Interpretationen:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_G + \omega \underline{\hat{r}}_{PG} \quad \text{mit} \quad \underline{v}_G = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_P = \omega \underline{\hat{r}}_{PG}$$

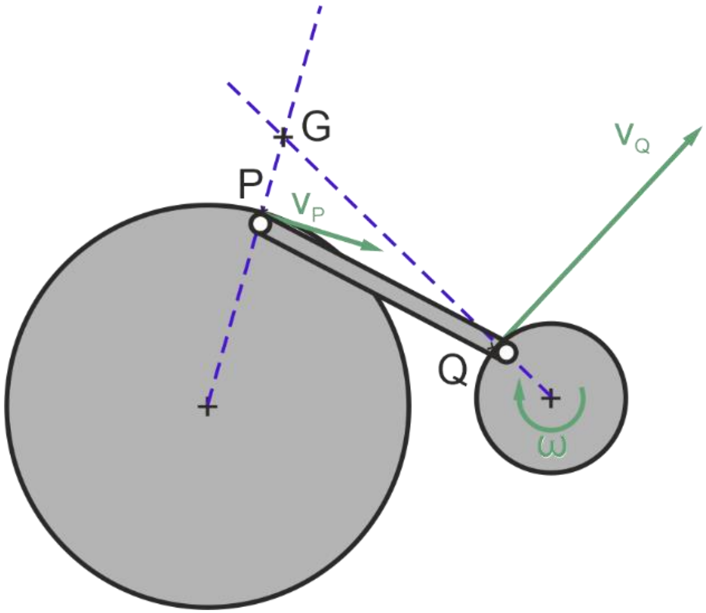


Grafische Konstruktion von G:

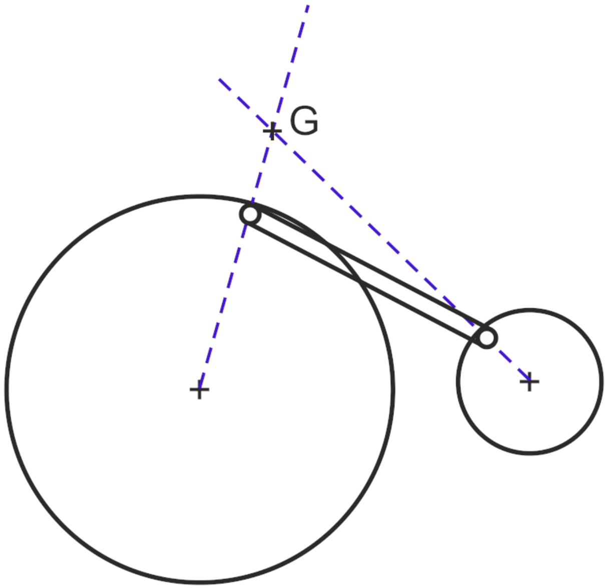


Man findet den Geschwindigkeitspol also, wenn man zwei Geschwindigkeitsvektoren an einem Starrkörper kennt, und deren Normale miteinander verschneidet.
Die Beträge der Geschwindigkeiten einzelner Punkte sind dann proportional dem Abstand des jeweiligen Punkts vom Geschwindigkeitspol.

Beispiel: Koppelgetriebe, siehe VO



Animation:



18.2 Ebene Bewegung des starren Körpers

Beispiel: Rollendes Rad

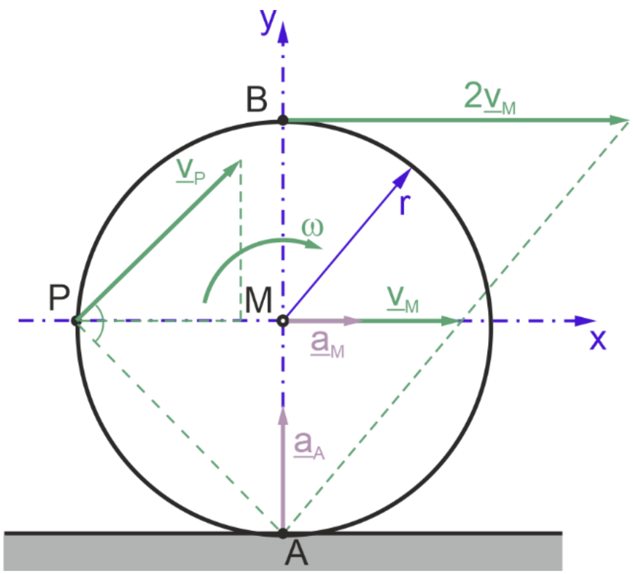
Geg.: Radius r, v_M, a_M
Ges.: ω, $\dot{\omega}$, $\underline{v}_P$, $\underline{a}_A$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AM}$$

$$\underline{v}_A = \underline{0}$$

$$\underline{v}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_M = \begin{bmatrix} v_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{AM} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\omega} \times \underline{r}_{AM} = \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Rollen ohne zu Gleiten bedingt Haften! $\rightarrow \underline{v}_A = \underline{0}$

Bei Haften muss der Punkt A dieselbe Geschwindigkeit besitzen wie die Unterlage

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \omega = -\frac{v_M}{r} \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{a_M}{r}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_M + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{AM} - \omega^2 \underline{r}_{AM} \qquad \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{Ax} = a_M + \mathrm{r}\dot{\omega} = a_M - r\frac{a_M}{r} = 0$$

$$a_{Ay} = r\omega^2 = r\frac{{v_M}^2}{r^2} = \frac{{v_M}^2}{r} \neq 0$$

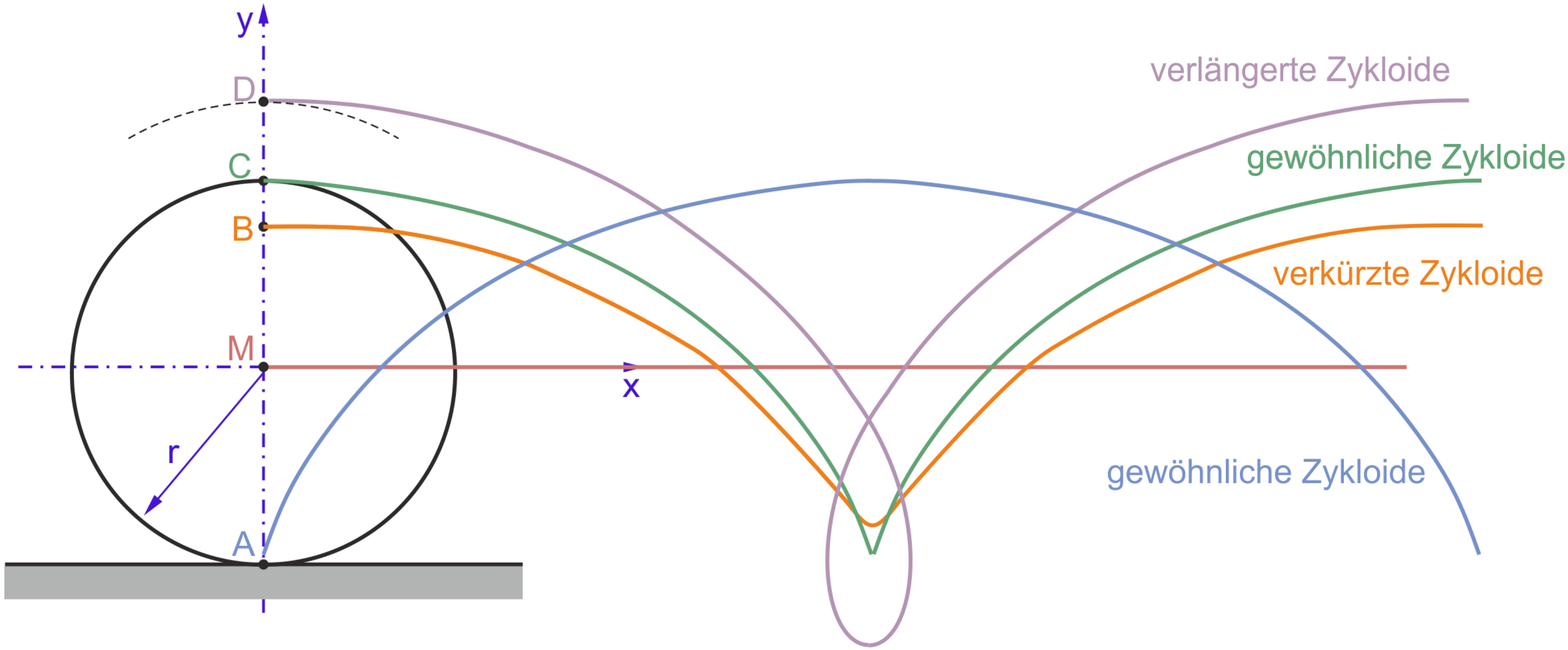
$$\underline{a}_A = -\frac{{v_M}^2}{r^2}\begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ {v_M}^2/r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PM}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{Px} = v_M$$

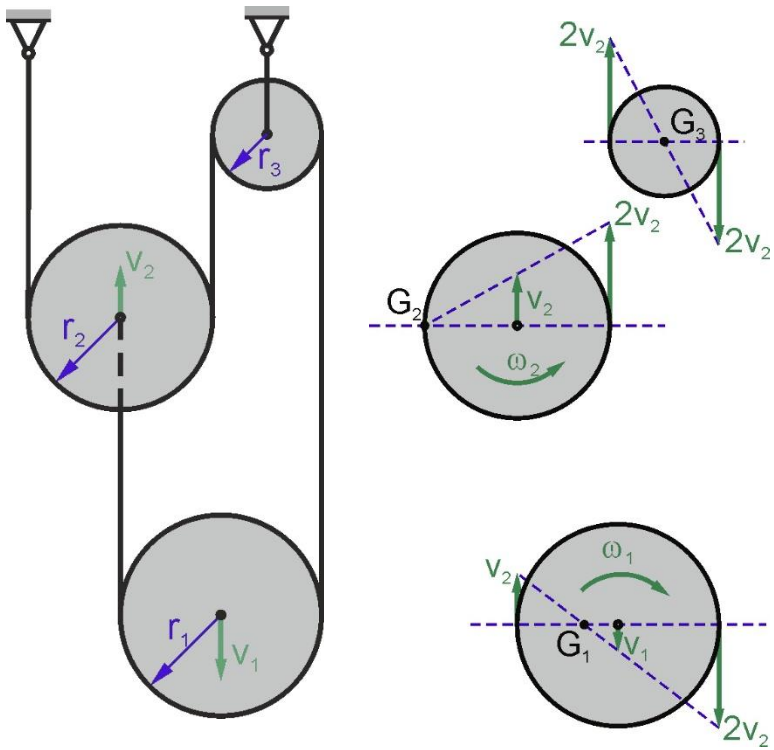
$$v_{Py} = -r\omega = r\frac{v_M}{r} = v_M$$



Beispiel: Seilrollensystem

Geg.: $r_1,\ r_{2,}\ \ v_1$

Ges.: $v_2,\ \omega_1,\ \omega_2$



Rolle 1:

$$\left.\begin{aligned} 2v_2 &= v_1 + r_1\omega_1 \\ v_2 &= -v_1 + r_1\omega_1 \end{aligned}\right\}$$

Rolle 2:

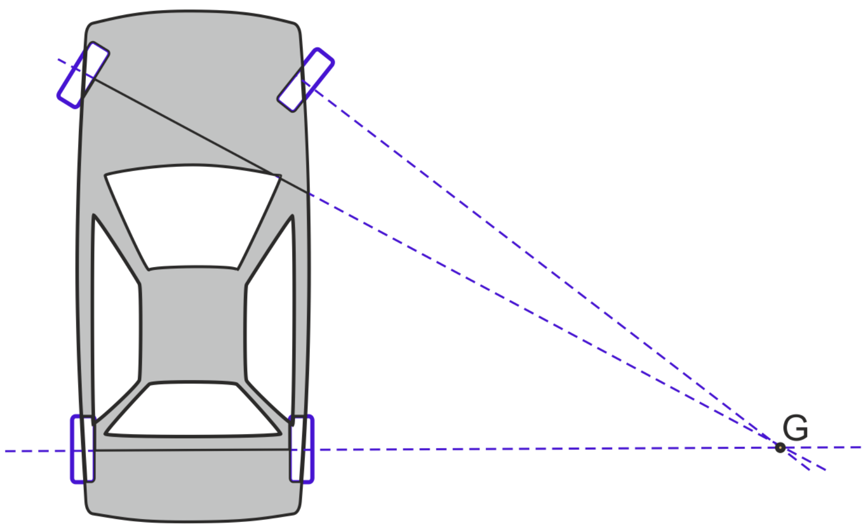
$$v_2 = r_2\omega_2$$

$$v_2 = 2v_1$$

$$\omega_2 = \frac{2v_1}{r_2}$$

$$\omega_1 = \frac{3v_1}{r_1}$$

Beispiel: Kurvenfahrt



18.2.2 Beschleunigungspol

$$\underline{a}_P = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_{PA} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) \qquad \underline{\omega} = \omega \underline{e}_z\,, \qquad \underline{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \underline{e}_z$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_A + \underbrace{\dot{\omega}\overbrace{\underline{e}_z \times \underline{r}_{PA}}^{\hat{\underline{r}}_{PA}}}_{\underline{a}_{PA,t}} \underbrace{- \omega^2 \underline{r}_{PA}}_{\underline{a}_{PA,n}}$$

Gibt es einen Punkt B, der momentan die Beschleunigung $= 0$ besitzt?
Wenn ja, wo liegt dieser?

$$\underline{a}_B \stackrel{!}{=} \underline{0} = \underline{a}_A + \dot{\omega}\underline{e}_z \times \underline{r}_{BA} - \omega^2 \underline{r}_{BA} \Big| \; \underline{e}_z \times$$

B…Beschleunigungspol

$$\underline{0} = \underline{e}_z + \underline{a}_A + \dot{\omega}\underline{e}_z \times (\underline{e}_z \times \underline{r}_{BA}) - \omega^2 \underline{e}_z \times \underline{r}_{BA}$$

$$\underline{0} = \underline{e}_z \times \underline{a}_A - \dot{\omega}\underline{r}_{BA} - \omega^2 \underline{e}_z \times \underline{r}_{BA}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\omega} \begin{bmatrix} x_{BA} \\ y_{BA} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{BA} \\ y_{BA} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{BA} = \frac{\omega^2 \ddot{x}_A - \dot{\omega}\ddot{y}_A}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \qquad y_{BA} = \frac{\omega^2 \ddot{y}_A - \dot{\omega}\ddot{x}_A}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \qquad \underline{r}_{BA} = \frac{\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\underline{a}_A + \frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}(\underline{e}_z \times \underline{a}_A)$$