17. Punktkinematik

17.1 Grundbegriffe

Beschreibung der Bewegung eines Punktes:
Punktkinematik

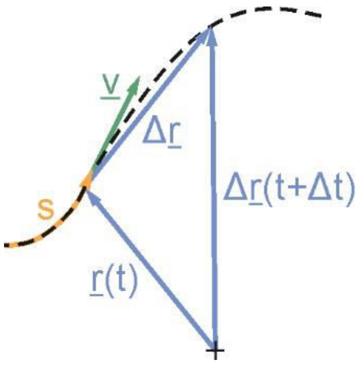
Angabe der Position durch $\underline{r}$

z. B. in kartesischen Koord.: $\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$
in Zylinderkoord.: $\underline{r} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$

Der Geschwindigkeitsvektor (velocitas)

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\boxed{\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}}$$



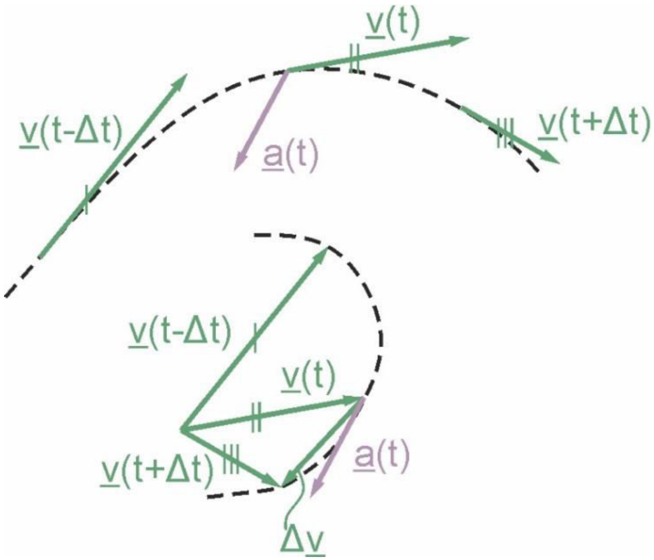
$\underline{v}$ ist stets tangential an die Bahnkurve

Der Beschleunigungsvektor (acceleratio)

$$\underline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{v}(t+\Delta t) - \underline{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}} \\ \underline{a} &= \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \ddot{\underline{r}} \end{aligned}}$$

$\underline{a}$ zeigt ins Innere der Bahnkurve (ist im Allgemeinen nicht tangential an die Bahnkurve)



Polarer Hodograph

17.2. Beschreibung in unterschiedlichen Koordinatensystemen

17.2.1 Kartesisches KS

$$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z + \underbrace{\cancel{x\dot{\underline{e}}_x} + \cancel{y\dot{\underline{e}}_y} + \cancel{z\dot{\underline{e}}_z}}$$

Keine zeitliche Änderung der Einheitsvektoren, da das KS fest im Bezugssystem verankert ist

$$|\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{x}\underline{e}_x + \ddot{y}\underline{e}_y + \ddot{z}\underline{e}_z$$

Die positiven Zählrichtungen von $\ddot{x}, \ddot{y}$ und $\ddot{z}$ stimmen mit den Orientierungen von $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ und $\underline{e}_z$ überein

$$|\underline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

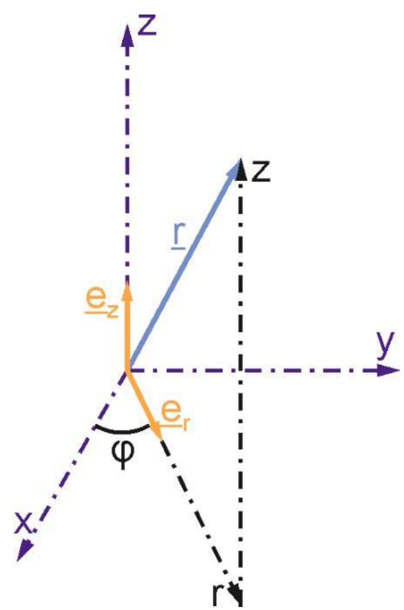
17.2.2 Zylinderkoordinaten

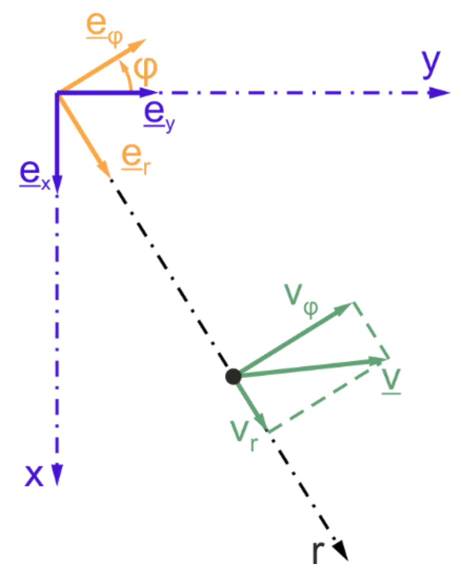
$$\underline{r} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \underline{\dot{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\underline{\dot{e}}_r + \dot{z}\underline{e}_z + z\cancel{\underline{\dot{e}}_z}$$

$$\underline{e}_r = cos\varphi\underline{e}_x + sin\varphi\underline{e}_y$$

$$\underline{\dot{e}}_r = -sin\varphi\dot{\varphi}\underline{e}_x + cos\varphi\dot{\varphi}\underline{e}_y = $$
$$= \underbrace{\left(-sin\varphi\underline{e}_x + cos\varphi\underline{e}_y\right)}_{\underline{e}_\varphi}\dot{\varphi}$$





$$\boxed{\underline{\dot{e}}_r = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi}$$
$$\boxed{\underline{\dot{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\underline{e}_r}$$

$$\boxed{\underline{v} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\underline{e}_r + \underbrace{r\dot{\varphi}}_{v_\varphi}\underline{e}_\varphi + \underbrace{\dot{z}}_{v_z}\underline{e}_z}$$

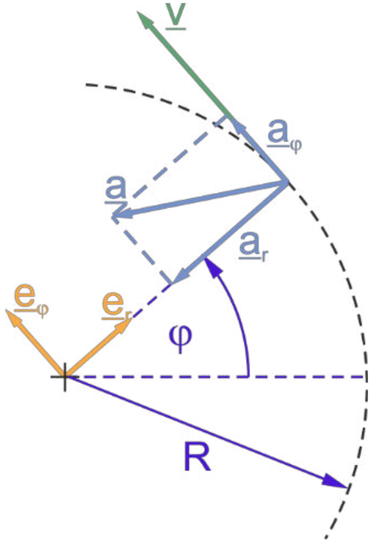
$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\underline{\dot{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\underline{\dot{e}}_\varphi + \ddot{z}\underline{e}_z + \dot{z}\underline{\dot{e}}_z =$$
$$= \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r + \ddot{z}\underline{e}_z$$

$$\boxed{\underline{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{a_r}\underline{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}_{a_\varphi}\underline{e}_\varphi + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\underline{e}_z}$$

Beispiel: Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn

Geg.: $r(t) = \mathrm{R} = const., \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$

Ges.: $\underline{v}$, $\underline{a}$



$$\underline{v} = R\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \qquad |\underline{v}| = R\dot{\varphi}$$

$$\underline{a} = \underbrace{-R\dot{\varphi}^2\underline{e}_r}_{a_r} + \underbrace{R\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi}_{a_\varphi}$$

Wenn die Bahngeschwindigkeit $|\underline{v}|$ konstant ist, wird $\ddot{\varphi} = 0$, somit tritt keine Beschleunigungskomponente a_φ auf. Es tritt aber immer noch eine Radialbeschleunigung auf, da der Geschwindigkeitsvektor ständig seine Richtung ändert.

Definition: $\dot{\varphi}$…zeitliche Änderung des Winkels = WINKELGESCHWINDIGKEIT $\omega = \dot{\varphi}$

z. B.: ω der Erde $= \dfrac{2\pi}{86400} = \underline{72.7 \cdot 10^{-6}\, s^{-1}}$ $\qquad [\omega] = \dfrac{rad}{s} = s^{-1}$

Formel 1-Motor: $n = 14000\ U/min$

$\rightarrow \underline{\omega = 1466\, s^{-1}}$

Beispiel: Zentralbewegung

Beschleunigung in Richtung $\underline{e}_r$

$\rightarrow a_\varphi = 0$

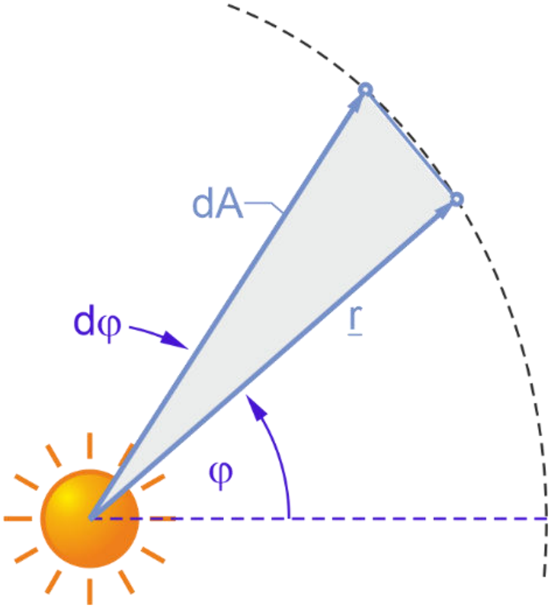
$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$

$r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega = 0$

$\rightarrow \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{2\dot{r}}{r} \Big/ \int dt$

$\ln\omega = -2\ln r + \ln c$

$\rightarrow r^2\omega = c$



$dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}c$

die Flächengeschwindigkeit ist konstant…2. Keplersches Gesetz

$a_r = \ddot{r} - r\omega^2$

außerdem gilt: $a_r = -\mathrm{k}\frac{1}{r^2}$

$-{}^{k}\!/_{r^2} = \ddot{r} - r\frac{c^2}{r^4}$

$-{}^{k}\!/_{r^2} = \ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}$

$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{k}{r^2} = 0$

Lösung: $r(\varphi) = \frac{c^2}{k(1+\varepsilon\cos\varphi)}$

$\varepsilon < 1$ Ellipse

$\varepsilon = 1$ Parabel

$\varepsilon > 1$ Hyperbel

ε abhängig von Anfangsabstand und Anfangsgeschwindigkeit (r_0, v_0)

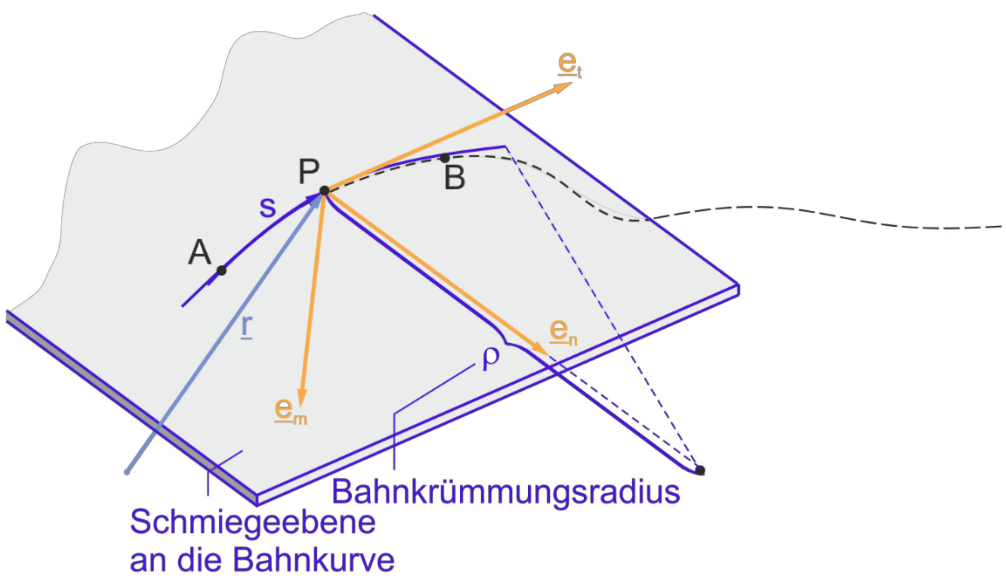
17.2.3 Natürliche Koordinaten

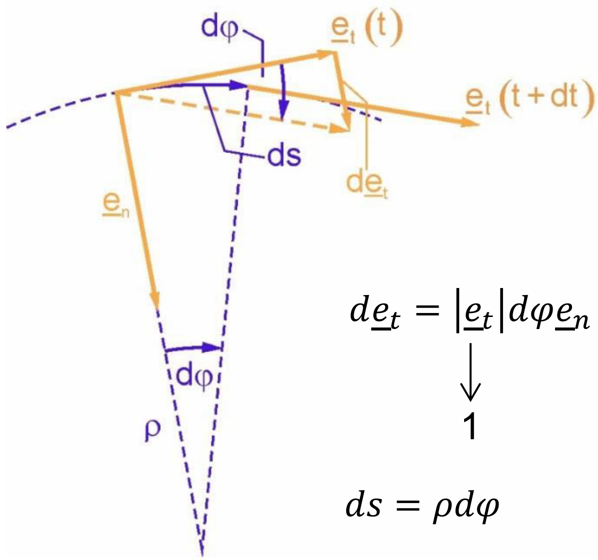
$\underline{e}_m = \underline{e}_t \times \underline{e}_n$ $\quad$ $\underline{e}_t$, $\underline{e}_n$ und $\underline{e}_m$ bilden das begleitende Dreibein

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\underline{e}_t$$

$$\underline{e}_t = \frac{d\underline{r}}{ds} \qquad\qquad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\underline{e}_t) = \frac{dv}{dt}\underline{e}_t + v\frac{d\underline{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\underline{e}_t + v\frac{d\underline{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$





$$d\underline{e}_t = \underbrace{|\underline{e}_t|}_{1} d\varphi\, \underline{e}_n$$

$$ds = \rho\, d\varphi$$

$$\frac{d\underline{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\underline{e}_n$$

$$\boxed{\underline{a} = \dot{v}\underline{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n} \qquad \underline{v} = v\underline{e}_t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$ …Tangentialbeschleunigung

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$ …Normalbeschleunigung

$$|\underline{a}|^2 = {a_t}^2 + {a_n}^2$$

Außerdem gilt:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}$$

$$a_t = v\frac{dv}{ds}$$

$$\boxed{v\,dv = a_t\,ds}$$ Zeitfreie Gleichung

Analog für Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\dot{\varphi}}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi}\,d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}} \qquad \boxed{\dot{\omega}\,d\varphi = \omega\,d\omega}$$

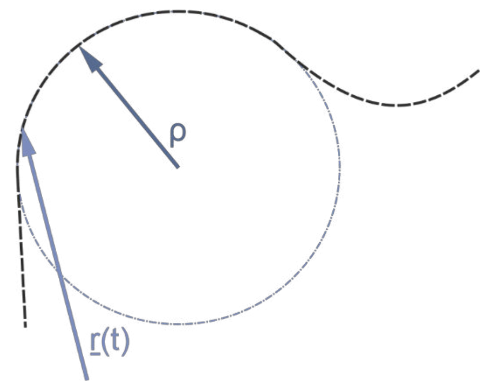
17.3 Beispiele

Beispiel: Bewegung eines Teilchens

Geg.: $\underline{r}(t) = t^2 \underline{e}_x + \frac{1}{3} t^3 \underline{e}_y$

Achtung: Vorfaktoren nicht dimensionsfrei

Ges.: Radius ρ der Bahnkurve bei $t = 2s$.



$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} t^2 \\ \frac{1}{3} t^3 \end{bmatrix} mm \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} 2t \\ t^2 \end{bmatrix} mm/s \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \end{bmatrix} mm/s^2$$

$$|\underline{v}| = t\sqrt{4 + t^2} \qquad |\underline{a}| = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$|\underline{a}|^2 = a_t{}^2 + a_n{}^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{4+t^2} + t\frac{2t}{2\sqrt{4+t^2}} = \frac{4+2t^2}{\sqrt{4+t^2}}$$

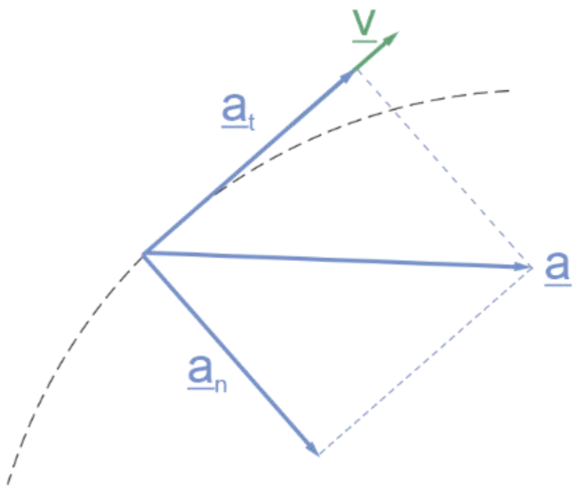
für $t = 2s$: $\quad a_t = 3\sqrt{2} \quad mm/s^2$

$$|\underline{a}| = 2\sqrt{5} \quad mm/s^2$$

$$a_n = \sqrt{20-18} = \sqrt{2} \;\; mm/s^2$$

$$v = 4\sqrt{2} \quad mm/s$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2} = 22.6\, mm$$



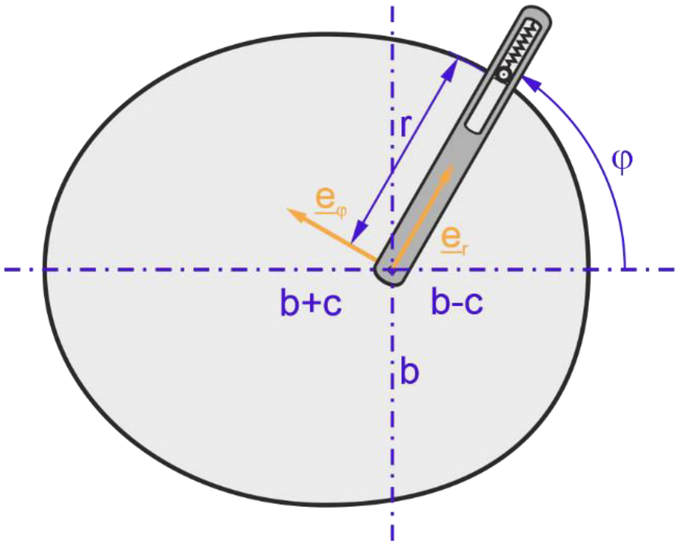
Alternative:

$$a_t = \underline{a} \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad |\underline{v}| = 4\sqrt{2} \qquad a_t = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\sqrt{2} \;\; mm/s^2$$

Beispiel: Kurvenscheibe

Geg.: $r(\varphi) = b - c\cos\varphi$ für b>c
Umlaufgeschwindigkeit der Kulisse ω = const.

Ges.: Beschleunigung der Rolle



$$\underline{r} = r\underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\omega\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\underline{e}_r + (r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega)\underline{e}_\varphi$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\omega = \text{konst.} \rightarrow \dot{\omega} = 0$$

$$\dot{r} = c\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = c\omega\sin\varphi$$

$$\ddot{r} = c\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \cancel{c\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi}} = c\omega^2\cos\varphi$$

$$\underline{a} = [c\omega^2\cos\varphi - (b - c\cos\varphi)\omega^2]\underline{e}_r + [2c\omega^2 \cdot \sin\varphi]\underline{e}_\varphi = [2c\omega^2\cos\varphi - b\omega^2]\underline{e}_r + [2c\omega^2 \cdot \sin\varphi]\underline{e}_\varphi$$

$$|\underline{a}|^2 = 4c^2\omega^4\cos^2\varphi + b^2\omega^4 - 4cb\omega^4\cos\varphi + 4c^2\omega^4\sin^2\varphi$$

$$|\underline{a}| = \omega^2\sqrt{4c^2 - 4cb\cos\varphi + b^2}$$

Beispiel: zeitfreie Gleichung

Geg.: $v_A = 180\,km/h = 50\,m/s$, $v_B = 90\,km/h = 25\,m/s$,
konstante Bremsverzögerung, $\rho_B = 20\,m$, $|AB| = 100\,m$

Ges.: Gesamtbeschleunigung in B

$$vdv = a_t ds \qquad a_t = const.$$

$$\int_{50}^{25} vdv = \int_{0}^{100} a_t ds$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_{50}^{25} = a_t s \Big|_{0}^{100}$$

$$a_t = \frac{25^2 - 50^2}{2 \cdot 100} = -9.375\ m/s^2$$

$$a_n = \frac{{v_B}^2}{\rho_B} = \frac{625}{20} = 31.25\ m/s^2$$

$$a_{gesB} = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} = 32.63\ m/s^2$$