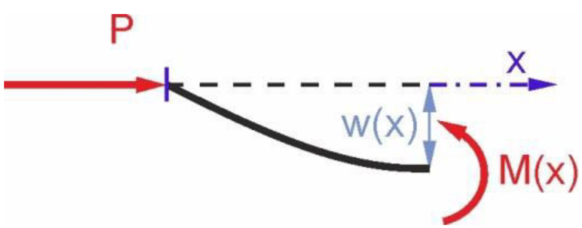
16. Knicken

16.1 Stabilität des axial gedrückten Stabs

Im Gegensatz zur bisher üblichen geometrisch linearen Theorie schreiben wir das Gleichgewicht nun am deformierten Körper an:



$$M(x) = Pw(x)$$

$$w'' = -\frac{M(x)}{EJ}$$ Voraussetzung: EJ=const.

$$w'' + \frac{P}{EJ} w = 0$$ Analogie zu Schwingungsgleichung!

Lösungsansatz:

$$w(x) = A\sin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{P}{EJ}}}_{\alpha}\,x\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,x\right)$$

$$w'(x) = \alpha A\cos\alpha x - \alpha B\sin\alpha x$$

$$w''(x) = -\alpha^2 A\sin\alpha x - \alpha^2 B\cos\alpha x$$

Zur Bestimmung der Konstanten A und B müssen wir Randbedingungen anschreiben:

$$w(x=0) = 0{:}\;\; 0 = B$$

$$w(x=\ell) = 0{:}\;\; 0 = A\sin\alpha\ell$$

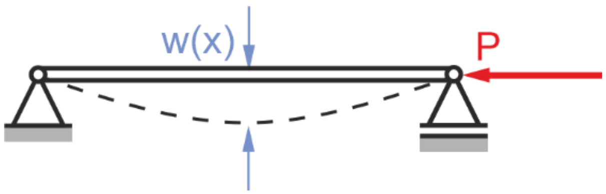
liefert nur dann eine nicht-triviale Lösung für A, wenn $\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,\ell\right) = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}}\,\ell = n\pi \;\;\Rightarrow\;\; P = \frac{EJn^2\pi^2}{\ell^2}$$

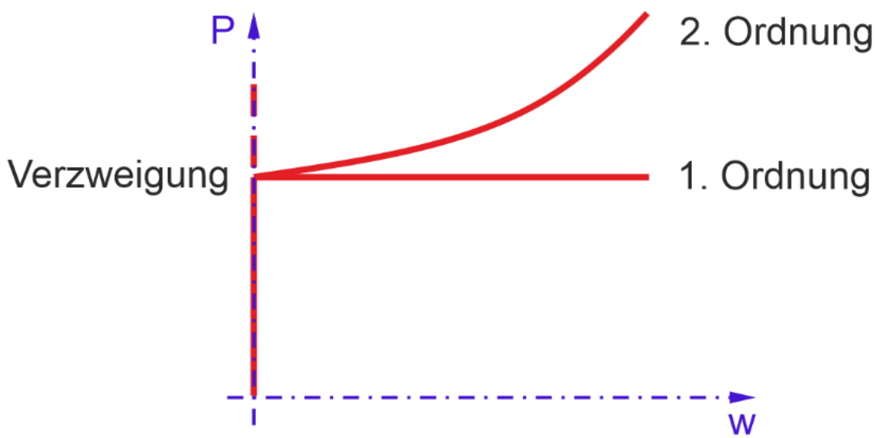
Für n=1 liefert das einen kritischen Wert $P_K = \frac{EJ\pi^2}{\ell^2}$

$$w(x) = A\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,x\right)$$

A mit Theorie 1. Ordnung nicht zu bestimmen:



Verzweigungsproblem:



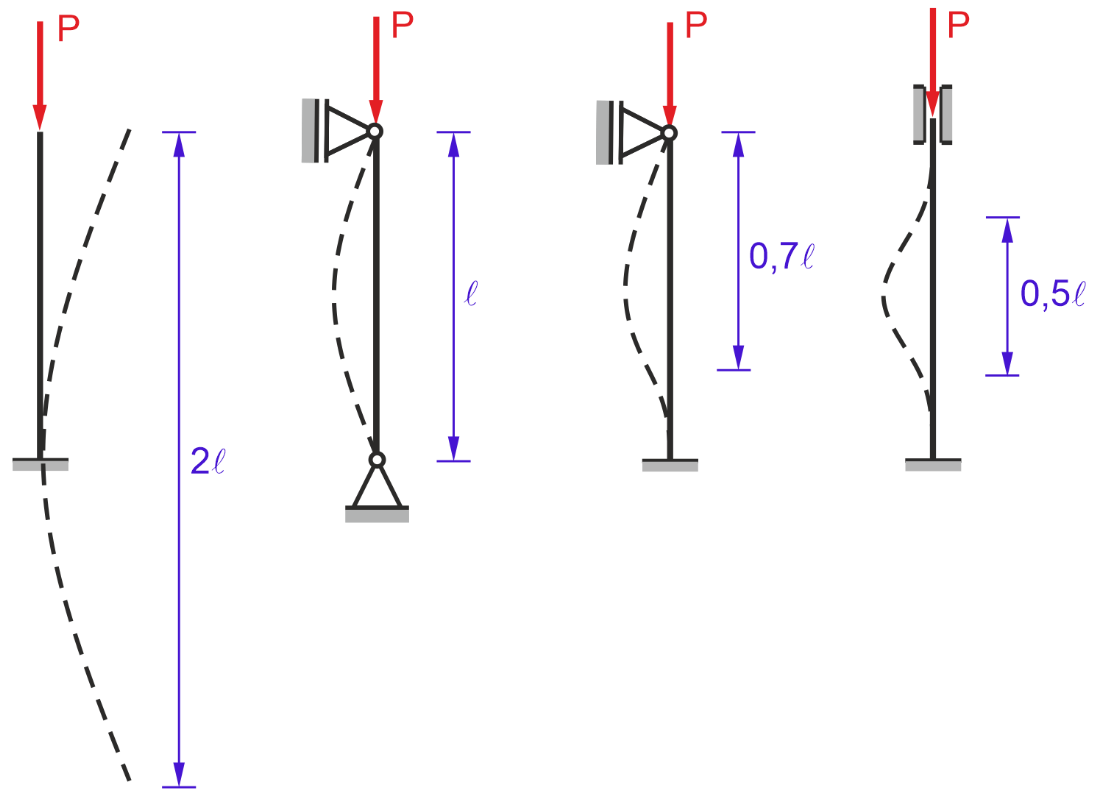
16.2 Eulersche Knickfälle

Bei anderen Lagerungsbedingungen ergeben sich andere Lösungen für P_K. Grundsätzlich kann man P_K folgendermaßen anschreiben:

$$\boxed{P_K = \frac{EJ\pi^2}{\ell_K{}^2}}$$

J ist im Regelfall das kleinste HTRM. Beispiele, wo dies nicht zutrifft, werden in der Vorlesung besprochen.

Eulersche Knickfälle



Knickfall 1 $\ell_K = 2\ell$

Knickfall 2 $\ell_K = \ell$

Knickfall 3 $\ell_K = 0.7\ell$

Knickfall 4 $\ell_K = 0.5\ell$

Allgemein gilt:

Solange $\sigma_k < R_P \Rightarrow$ linear-elastisches Materialverhalten

$$i = \frac{J}{A} \text{ ... Trägheitsradius}$$

$$\sigma_k = \frac{EJ\pi^2}{A{\ell_K}^2} < R_P \Rightarrow \sigma_k = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} < R_P \text{ mit } \boxed{\lambda = \frac{\ell_K}{i}}$$

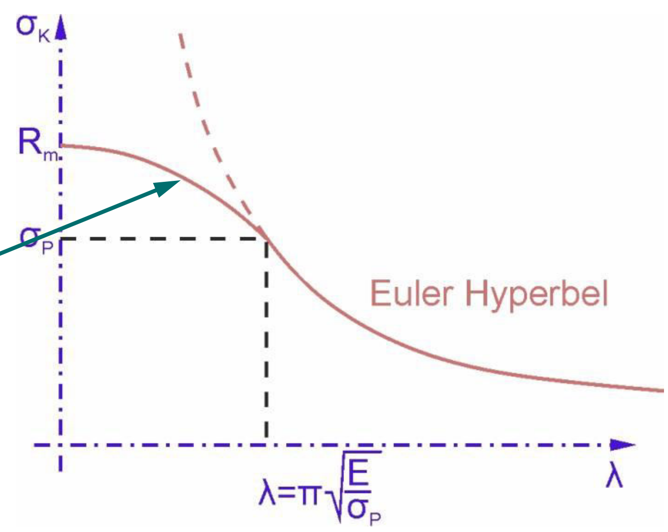
λ... Schlankheitsgrad, hängt von der Stabgeometrie ab!

$\lambda > \lambda_K$ …wenn erfüllt, dann Euler-Knicken mit $\boxed{\lambda_K = \pi\sqrt{\frac{E}{R_P}}}$

λ_K … Grenzschlankheit, hängt vom Werkstoff ab!

Ist hingegen diese Bedingung nicht erfüllt, so verlässt man den Bereich der Euler Hyperbel (d.h. der hyperbolische Zusammenhang zwischen σ_k und λ).

Den Bereich links der Grenzschlankheit nennt man Tetmajer Bereich. Dazu existiert eine eigene Theorie, die in dieser Vorlesung aber nicht behandelt wird.



Beispiel: Kritische Knickkraft eines Stabes

Geg.: zylindrischer Stab aus Stahl
ℓ = 1000 mm
r = 10 mm
E = 210 GPa
R_P = 192 MPa

Ges.: Kritische Knickkraft P_K

Hier liegt der Knickfall 2 vor, folglich ist
$l_k = l$

Zunächst muss überprüft werden, ob Euler-Knicken vorliegt:

$$J = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{10^4\pi}{4}\, mm^4 \qquad A = r^2\pi = 10^2\pi\, mm^2$$

Trägheitsradius $i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{10^4\pi}{4 \cdot 10^2\pi}} = 5\, mm$

$$\lambda = \frac{1000mm}{5mm} = 200 \qquad \lambda_K = \pi\sqrt{\frac{E}{R_P}} = \pi\sqrt{\frac{210.000MPa}{192MPa}} = 103{,}9$$

Es liegt Euler-Knicken vor, da $\lambda > \lambda_K$

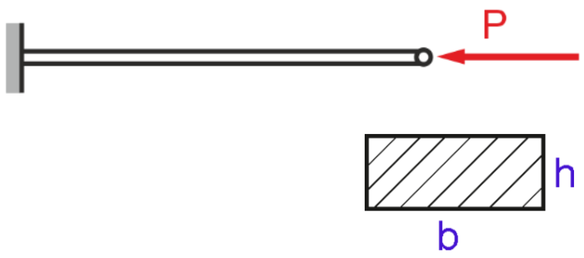
$$P_K = \frac{EJ\pi^2}{{\ell_K}^2} = \frac{2.1 \cdot 10^5 MPa \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot mm^4 \cdot \pi^2}{4 \cdot 10^6 mm^2} = 16270\, N \qquad \sigma_k = \frac{P_K}{A} = \frac{16270N}{10^2\pi \cdot mm^2} = 51{,}82\, MPa$$

Offensichtlich ist die im Stab auftretende Spannung beim Knicken kleiner als die Proportionalgrenze (bzw. Streckgrenze). Somit verläuft das Knicken rein elastisch. Nur unter dieser Voraussetzung gilt überhaupt die zuvor hergeleitete Theorie des Euler-Knickens.

Beispiel: Sicherheit gegen Knicken

Geg.: schlanker Stab aus Stahl
ℓ = 500 mm
b = 10 mm
h = 8 mm
P = 400N
E = 210 GPa
Es liegt Euler-Knicken vor

Ges.: Sicherheit gegen Knicken S_K



Hier liegt der Knickfall 1 vor, folglich ist
$l_k = 2l$

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{1280}{3}\ mm^4$$ Hier entspricht J dem minimalen HTRM

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{l_k^2} = \frac{(2.1\cdot 10^5 N/mm^2)\cdot(\frac{1280}{3}mm^4)\cdot\pi^2}{(2\cdot 500mm)^2} = 884\ N$$

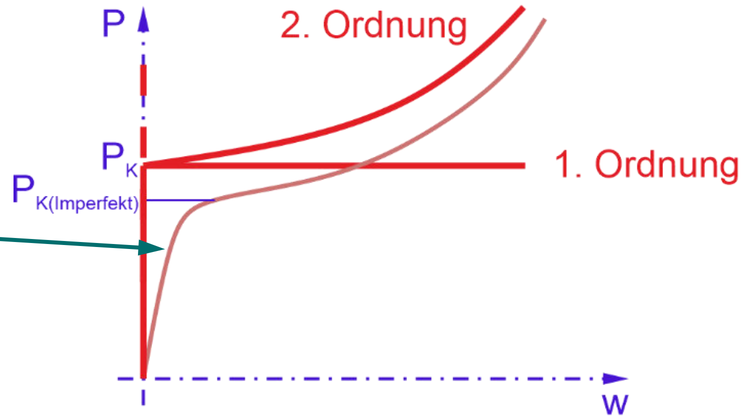
$$S_k = \frac{P_k}{P} = \frac{884N}{400N} = 2.21$$

Diese Sicherheit ist gering. Normalerweise sollte die Sicherheit gegen Knicken zwischen 3 und 7 liegen.

Zusatzinformation:

Imperfektionseinfluss:

Oftmals ist ein Stab nicht perfekt zentrisch belastet. Dann ergibt sich beispielsweise folgender Last-Verschiebungspfad.



Weitere Beispiele für Imperfektionen:

- Stab ist nie perfekt gerade
- Inhomogenität im Material