15 Energiemethoden

15.1 Die Ergänzungsenergie des geraden Stabes

In Mechanik IA haben wir bereits den Begriff der Ergänzungsenergie U^* eines (thermo-) elastischen Körpers kennengelernt.

$$U^* = \frac{1+\nu}{2E} \int_V \left(\frac{9p^2}{1+\nu} + 2I_2 \right) dV + 3 \int_V \alpha_T \Delta T p \, dV$$

Für den einachsigen Spannungszustand ist $p = \frac{\sigma_x}{3}, \quad I_2 = 0$

$$U^* = \int_0^L \int_A \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} + \sigma_x \alpha_T \Delta T \right) dA \; dx$$

Für den geraden Stab können wir σ_x ausrechnen: $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y$

Eingesetzt in obigen Ausdruck ergibt sich:

$$U^* = \int_0^L \int_A \left\{ \frac{1}{2E} \left[\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{J_y}\right)^2 z^2 + \left(\frac{M_z}{J_z}\right)^2 y^2 + 2\frac{N}{A}\frac{M_y}{J_y} z - 2\frac{N}{A}\frac{M_z}{J_z} y - 2\frac{M_y}{J_y}\frac{M_z}{J_z} yz \right] + \right.$$

$$\left. + \alpha_T \left[\frac{N}{A} \Delta T + \frac{M_y}{J_y} z \Delta T - \frac{M_z}{J_z} y \Delta T \right] \right\} dA \, dx$$

In weiterer Folge gehen wir von folgender linearer Temperaturverteilung aus

$$\Delta T(z) = T_m + \Theta z$$

$$\int \frac{N}{A} \Delta T \, dA = \int_A \frac{N}{A} (T_m + \Theta z) \, dA = T_m \frac{N}{A} \int_A dA + \Theta \frac{N}{A} \int_A z \, dA = N T_m$$

$$\int_A \frac{M_y}{J_y} z (T_m + \Theta z) \, dA = \frac{M_y}{J_y} \Theta \int_A z^2 \, dA = M_y \Theta$$

Zur Erinnerung: $\int_A z^2 \, dA = J_y, \qquad \int y^2 \, dA = J_z$

$$\left.\begin{aligned} &\int_A z \, dA = \int_A y dA = 0 \\ &\int_A yz \, dA = 0 \end{aligned}\right\}$$

weil voraussetzungsgemäß y und z Trägheitshauptachsen sein müssen

Vorsicht: Komplexere Temperaturverteilungen können bereits selbst bei statisch bestimmter Lagerung zu Spannungen führen. Die Energieausdrücke sehen dann entsprechend komplizierter aus. Das wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

Wir beschränken uns jetzt auf ebene Probleme (in der xz-Ebene), berücksichtigen allerdings auch den Einfluss von Querkraft Q_z und Torsionsmoment M_T.
Dann ergibt sich für die Ergänzungsenergie:

$$U^* = \int_0^L \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + N\alpha_T T_m + M_y \alpha_T \Theta + \frac{M_T^2}{2GJ_T} + \kappa \frac{Q_z^2}{2GA} \right) dx$$

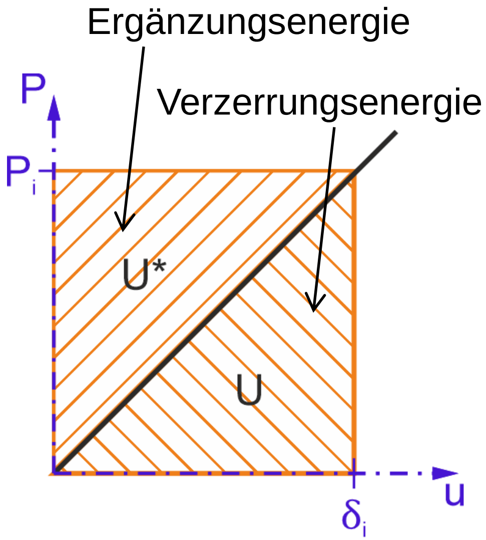
$$\frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \int_0^L \left(\frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P_i} + \frac{M_y}{EJ_y}\frac{\partial M_y}{\partial P_i} + \alpha_T T_m \frac{\partial N}{\partial P_i} + \alpha_T \Theta \frac{\partial M_y}{\partial P_i} + \frac{M_T}{GJ_T}\frac{\partial M_T}{\partial P_i} + \kappa \frac{Q_z}{GA}\frac{\partial Q_z}{\partial P_i} \right) dx$$

Die Arbeit A_i der am Balken angreifenden Kräfte $\underline{P}_i$ ergibt sich mit den Verschiebungen $\underline{u}_i$ der Angriffspunkte zu:

$$A_i = \frac{1}{2}\underline{P}_i \cdot \underline{u}_i = \frac{1}{2}|\underline{P}_i| \underbrace{|\underline{u}_i|\cos\Theta}_{\delta_i}$$

Die im Balken gespeicherte Energie ist somit:

$$U = \frac{1}{2}\sum P_i \delta_i$$



15.2 Satz von Castigliano

$$U + U^* = \sum_i P_i \delta_i \qquad U = U\,(\delta_1 \ldots \delta_n) \qquad U^* = U^*(P_1 \ldots P_n)$$

Bildet man nun das totale Differenzial der obigen Beziehung, so erhält man:

$$\mathrm{d}U + dU^* = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i + \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i \right) = \sum_i (P_i d\delta_i + dP_i \delta_i)$$

Der Vergleich liefert:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \delta_i \qquad \frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \delta_i}$$

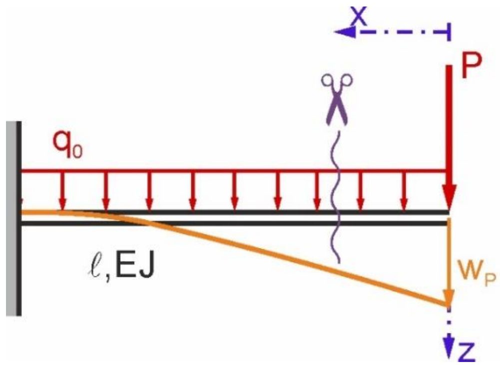
Satz von Castigliano

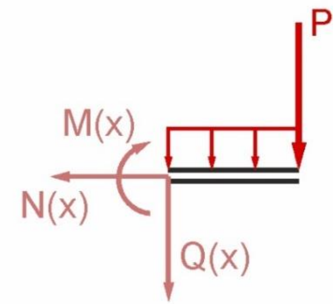
Der Satz von Castigliano liefert die Verschiebung eines Punktes unter einer Einzellast in Richtung dieser Einzellast.
Dieser Zusammenhang gilt allgemein für elastische Strukturen z.B. auch für gekrümmte Träger.

Beispiel: Kragträger

Geg.: q_0, ℓ, EJ, P

Ges.: w_P





Ansatz: $w_P = \dfrac{\partial U^*}{\partial P}$

Zur Berechnung von $\frac{\partial U^*}{\partial P_i}$ benötigt man die Schnittgrößen:

$$M(x) = -Px - q_0\frac{x^2}{2} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x$$

$$Q(x) = -P - q_0 x \qquad \frac{\partial Q(x)}{\partial P} = -1$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = \int_0^\ell \frac{M(x)}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P}dx + \int_0^\ell \kappa\frac{Q(x)}{GA}\frac{\partial Q(x)}{\partial P}dx$$

In den allermeisten Fällen (Querschnittsabmessungen sind klein gegenüber der Länge) ist das zweite Integral sehr viel kleiner als das erste und kann daher vernachlässigt werden:

$$\underline{w_P} = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \int_0^\ell \frac{M(x)}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P}dx = \frac{1}{EJ}\int_0^\ell \left(Px^2 + q_0\frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{1}{EJ}\left(P\frac{x^3}{3} + q_0\frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^\ell = \underline{\frac{1}{EJ}\left(P\frac{\ell^3}{3} + q_0\frac{\ell^4}{8}\right)}$$

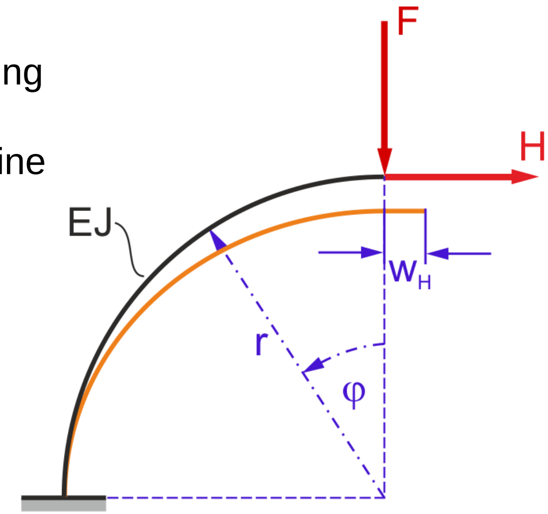
Beispiel: Viertelkreisbogen

Geg.: r, EJ, F

Ges.: Horizontalverschiebung w_H

Ansatz: $w_H = \dfrac{\partial U^*}{\partial H}$

In diesem Beispiel gibt es in Richtung der gesuchten Verschiebung keine eingeprägte Kraft, also führt man eine Hilfskraft H mit dem Betrag „0“ ein.



Aus den gleichen Gründen wie im vorigen Beispiel werden Quer- und Längskrafteinfluss vernachlässigt.

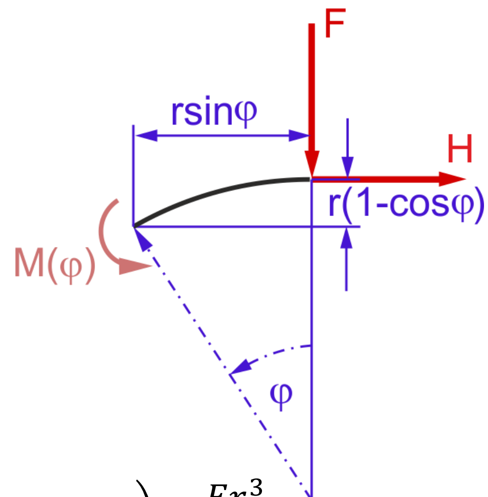
$$M(\varphi) - Fr\sin\varphi - Hr(1-\cos\varphi) = 0$$

$$M(\varphi) = Fr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial H} = r(1-\cos\varphi)$$

An dieser Stelle erinnern wir uns, dass H=0 ist.

$$w_H = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2} \underbrace{[Fr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi)]}_{M(\varphi)} \underbrace{[r(1-\cos\varphi)]}_{\frac{\partial M(\varphi)}{\partial H}} \underbrace{r d\varphi}_{ds}$$



$$= \frac{Fr^3}{EJ}\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)d\varphi = \frac{Fr^3}{EJ}\left(-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{Fr^3}{EJ}\left(-0 - \frac{1}{2} - (-1-0)\right) = \frac{Fr^3}{2EJ}$$

15.3 Satz von Menabrea

Die Energiemethoden können auch dazu genutzt werden, um bei bekannter Verschiebung eine weitere Gleichung zur Bestimmung einer unbekannten Auflagerreaktion zu generieren.
In diesem Zusammenhang nennt man die Methode „Satz von Menabrea“.

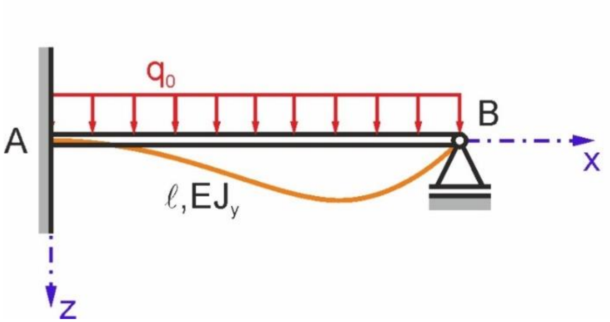
Beispiel: Unbestimmt gelagerter Träger

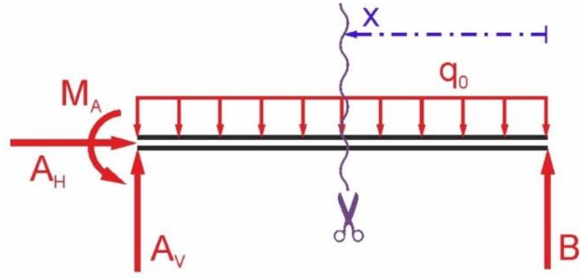
Geg.: ℓ, EJ_y, q_0

Ges.: Auflagerreaktion

$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial B} = 0}$$

Achtung: Als Spezialfall des Satzes von Castigliano gilt der Satz von Menabrea nur für statisch unbestimmte Systeme.





$$M(x) = Bx - q_0\frac{x^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial B} = x$$

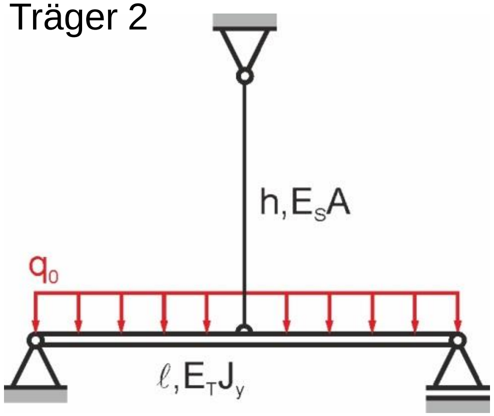
$$\frac{\partial U^*}{\partial B} = \frac{1}{EJ_y}\int_0^\ell \left(Bx^2 - q_0\frac{x^3}{2}\right)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad B\frac{\ell^3}{3} - q_0\frac{\ell^4}{8} = 0 \qquad \underline{B = \frac{3}{8}q_0\ell}$$

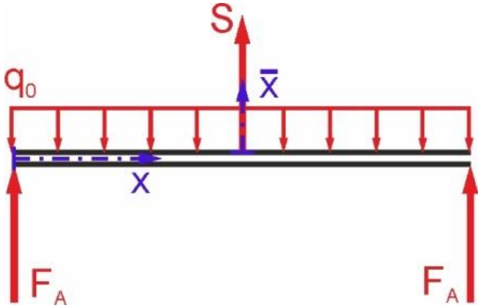
Beispiel: Unbestimmt gelagerter Träger 2

Geg.: $\ell, h, E_T J, E_S A$

Ges.: Seilkraft S

Ansatz: $\frac{\partial U^*}{\partial S} = 0$





$$M(x) = F_A x - q_0 \frac{x^2}{2} = \frac{q_0 \ell}{2} x - \frac{S}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$N(\bar{x}) = S$$

$$F_A = \frac{q_0 \ell}{2} - \frac{S}{2}$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial S} = -\frac{x}{2}$$

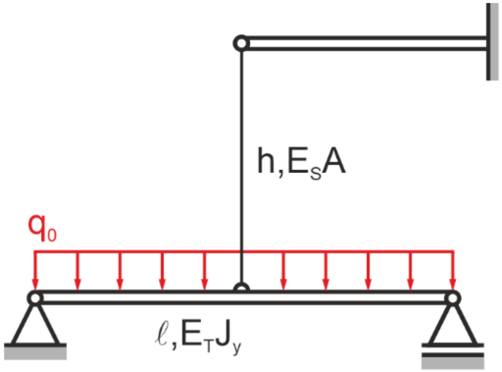
$$\frac{\partial N(\bar{x})}{\partial S} = 1$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial S} = \frac{2}{E_T J_y} \int_0^{\frac{\ell}{2}} M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial S} dx + \frac{1}{E_S A} \int_0^h N(\bar{x}) \frac{\partial N(\bar{x})}{\partial S} d\bar{x} = \frac{2}{E_T J_y} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(-q_0 l \frac{x^2}{4} + S \frac{x^2}{4} + q_0 \frac{x^3}{4} \right) dx + \frac{Sh}{E_S A} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \underline{S = \frac{5 q_0 \ell}{384 \frac{E_T J_y}{E_S A} \frac{h}{l^3} + 8}}$$

15.3.1 Erklärung zu vorheriger Annahme

Im Falle des Beispiels ist das Seil durch ein Festlager verschiebungsfrei gelagert, sodass die Verschiebung 0 ist. Jedoch kann die Verschiebung im Seil auch bei folgendem Fall als 0 angenommen werden, bei dem der Aufhängungspunkt offensichtlich nicht verschiebungsfrei ist:



Es sollte also noch geklärt werden, warum die Ableitung der Ergänzungsenergie nach der Seilkraft auch in diesem Fall null ist, obwohl das Seil eine Verschiebung erfährt.

Die Verschiebung ist in Summe 0, daher:

$$\frac{\partial U^*}{\partial S} = 0$$

Der Aufwand zur Bestimmung statisch unbestimmter Auflagerreaktionen oder Verformungen ist unter Zuhilfenahme der Energiemethoden zumeist deutlich geringer als mit der DGL der Biegelinie.