

## 14. Schubfluss

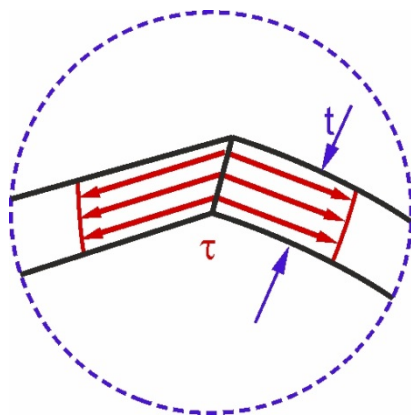
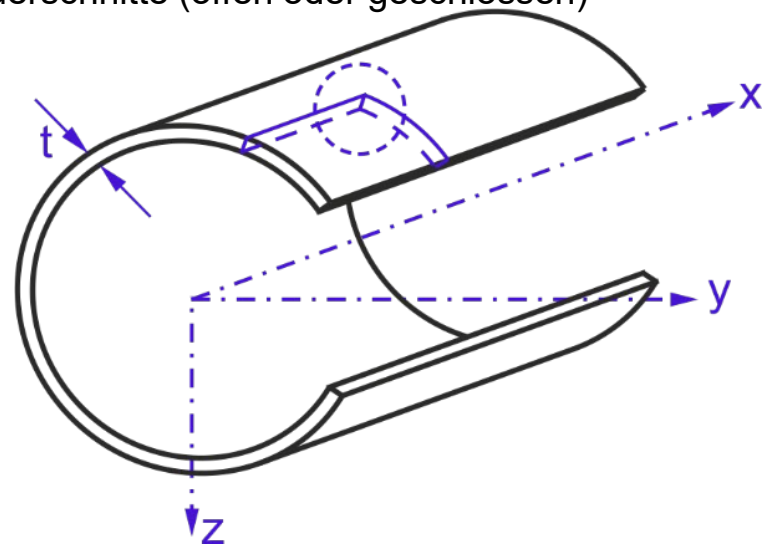
### 14.1 Schubspannungen zufolge einer Querkraft

Die Herleitung erfolgt zunächst für dünnwandige Querschnitte (offen oder geschlossen)

Dünnwandig: ...  $t \ll$  die sonstigen Querschnittsabmessungen

Schubspannung  $\tau$  [N/m<sup>2</sup>]

Wandstärke  $t$  [m]

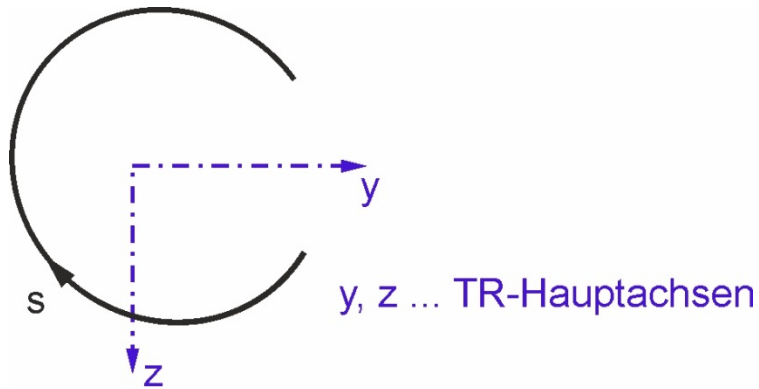


In den dargestellten Schnittflächen bewirkt die Querkraft Schubspannungen parallel zur Blechebene. Diese variieren in Dickenrichtung nur wenig um einen Mittelwert  $\tau$ .  
In weiterer Folge arbeitet man mit dem **Schubfluss**.

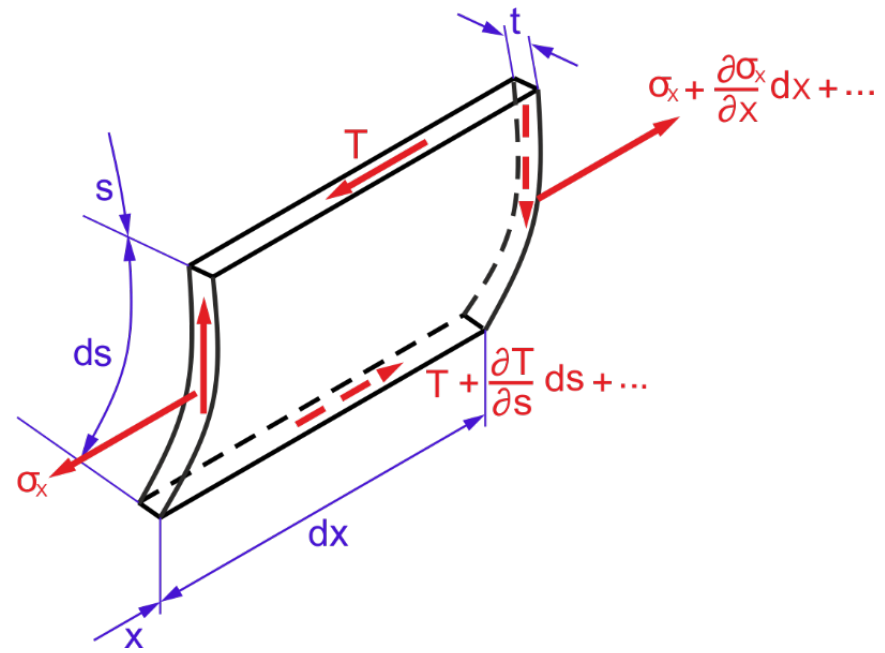
Definition: Schubfluss

$$T = \tau t \quad [\text{N/m}]$$

Wir legen ab jetzt die **Trägheitshauptachsen** des Profils als Koordinatensystem fest. Zudem führen wir als Positionsanzeiger einen Pfad  $s$  entlang der Profilmittellinie ein. Dessen Startpunkt kann grundsätzlich beliebig gewählt werden.



Um  $T(s)$  zu berechnen, schneiden wir an der Position  $x$  in Längsrichtung bzw.  $s$  entlang des Pfads ein infinitesimal kleines Element aus dem Träger heraus und setzen es ins Gleichgewicht:



Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung liefert:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) t ds - \sigma_x t ds + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} ds\right) dx - T dx = 0 \rightarrow t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (*)$$

Aus der Biegelehre kennen wir bereits folgende Zusammenhänge:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} = Q_z$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial x} \cdot \frac{z}{J_y} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = Q_z \frac{z}{J_y}$$

$$(*) \quad t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \rightarrow Q_z \frac{z}{J_y} t + \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \xrightarrow{\text{integrieren}} T(s) = -\frac{Q_z}{J_y} \int z t ds + T_0$$

$$T(s) = T_0 - \frac{Q_z}{J_y} \int_0^s z(\bar{s}) t(\bar{s}) d\bar{s}$$

mit  $T(s) = \tau(s)t(s)$

Alternativ gilt folgende Formulierung

$$T(s) = T_0 - \frac{Q_z}{J_y} S_y(s)$$

Offensichtlich ist  $S_y(s) = \int_0^s z(\bar{s}) t(\bar{s}) d\bar{s}$   
 ...**statisches Moment** bzgl. y-Achse

**Beispiel:** schlankes Rechteck

Geg.:  $h, b, Q_z$

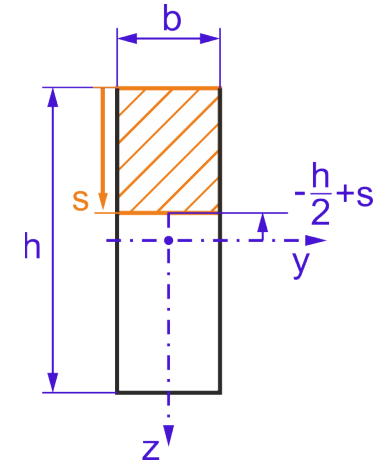
Ges.:  $T(s), \tau_{\max}$

$$J_y = \frac{1}{12}bh^3$$

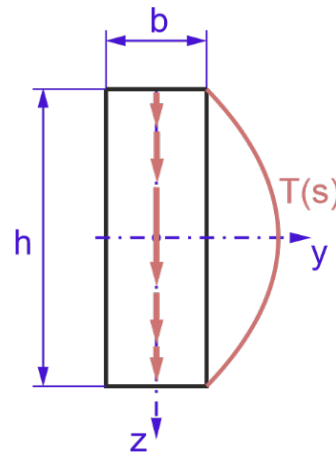
$$T_0 = T(s = 0) = 0, \quad t(s) = b$$

$$z(s) = -\frac{h}{2} + s$$

$$T(s) = 0 - \frac{Q_z}{J_y} \int_0^s \left(-\frac{h}{2} + \bar{s}\right) b d\bar{s} = \frac{12Q_z}{bh^3} \left(\frac{h}{2}bs - b\frac{s^2}{2}\right) = \frac{6Q_z}{h^3}(hs - s^2)$$



Schubflussverlauf:



Die Funktion ist in diesem Beispiel im Definitionsbereich  $0 \leq s \leq h$  positiv definit. Somit zeigt der Schubfluss in Richtung des gewählten Integrationspfads  $s$ .

Alternative: Berechnung mit Hilfe des statischen Moments

$$S_y(s) = sb \left( -\frac{h}{2} + \frac{s}{2} \right) \rightarrow$$

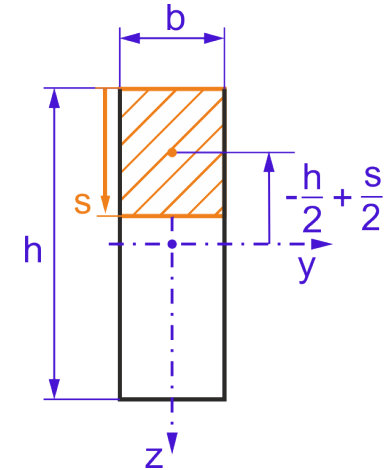
$$T(s) = -\frac{12Q_z}{bh^3} sb \left( -\frac{h}{2} + \frac{s}{2} \right) = \frac{6Q_z}{h^3} (hs - s^2)$$

Es ergibt sich somit der gleiche Schubflussverlauf wie zuvor.

Der Maximalwert des Schubflusses liegt bei  $s = h/2$ .

Für die Schubspannungen ergibt sich:

$$\tau(s) = \frac{6Q_z}{bh^3} (hs - s^2) \Rightarrow \underline{\tau_{\max}} = \tau(s = h/2) = \frac{3Q_z}{2bh} = \frac{3Q_z}{2A} = \underline{1.5 \frac{Q_z}{A}}$$



**Beispiel:** Kreisquerschnitt

Geg.:  $r, Q_z$

Ges.:  $T(s), \tau_{\max}$

$$T(s) = T_0 - \frac{Q_z}{J_y} \int_0^s z(\bar{s}) t(\bar{s}) d\bar{s}$$

$$T_0 = 0 \quad J_y = \frac{r^4 \pi}{4}$$

$$t(s) = 2\sqrt{r^2 - (r - s)^2} = 2\sqrt{2rs - s^2}$$

$$z(s) = -r + s$$

$$T(s) = -\frac{Q_z}{J_y} \int_0^s (-r + \bar{s}) 2\sqrt{2r\bar{s} - \bar{s}^2} d\bar{s}$$

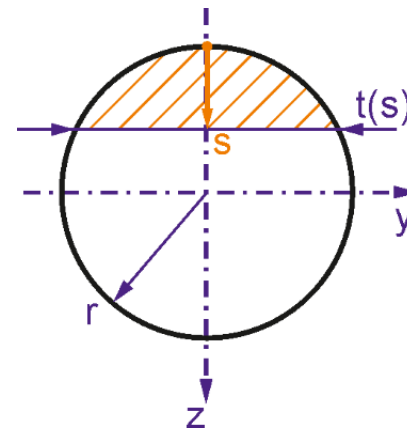
$$T(s) = \frac{8Q_z \sqrt{(2rs - s^2)^3}}{3\pi r^4} \quad \text{mit } T = \tau t$$

$$\tau(s) = \frac{4Q_z s(2r - s)}{3\pi r^4}$$

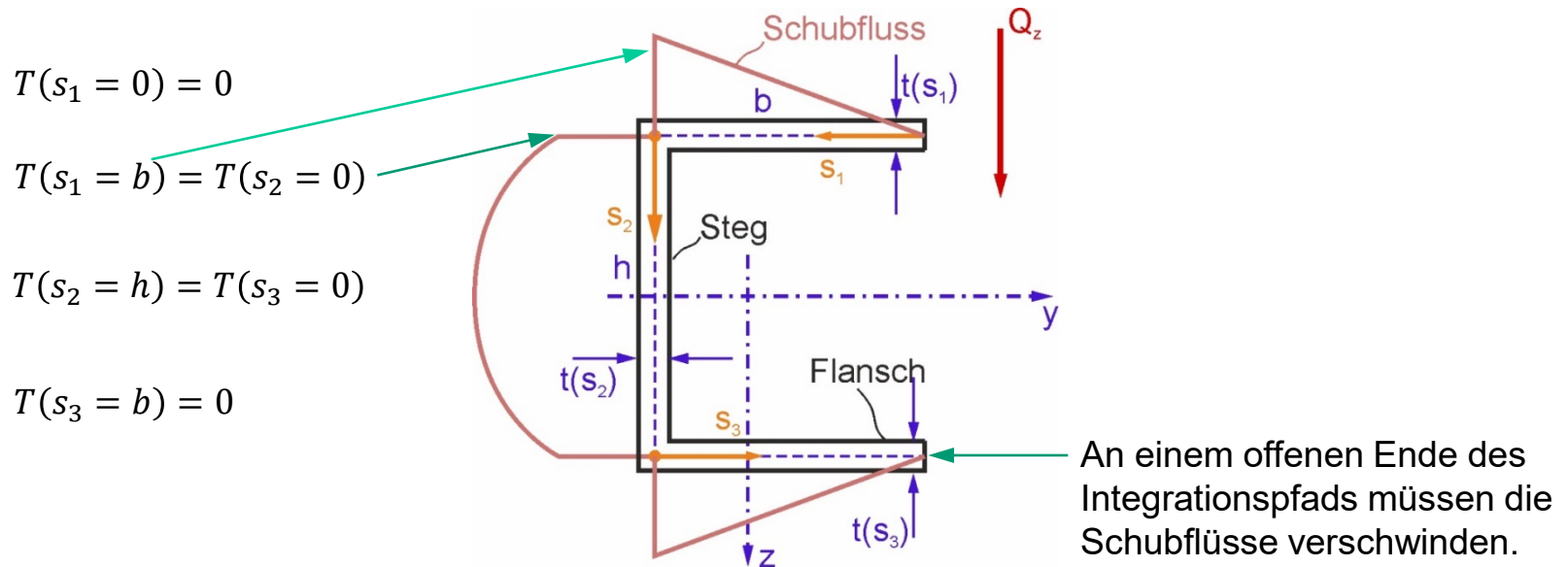
Maximum:  $\tau_{\max} = \tau(s = r) = \frac{4Q_z}{3\pi r^2}$

mit  $A = r^2 \pi$   $\tau_{\max} = \frac{4Q_z}{3A} \approx 1.33 \frac{Q_z}{A}$

Die Schubflusstheorie wurde für dünnwandige Querschnitte hergeleitet, dennoch wird sie in der Praxis gelegentlich auch für dickwandige Profile verwendet, z.B. zur Berechnung der Scherbeanspruchung von Bolzen.



## 14.1.1 Zusammengesetzte Profile



Für die Berechnung von  $J_y$  dürfen alle Näherungen für dünnwandige Bauteile angewandt werden. Also wenn  $t \ll b, h$ , dann  $t^2, t^3, \dots \approx 0$ .

$$T(s_1) = \frac{Q_z t}{h^2 \left(b + \frac{t}{6}\right)} s_1 \quad T(s_2) = \frac{Q_z t}{h^2 \left(b + \frac{t}{6}\right)} \left(b + s_2 - \frac{s_2^2}{h}\right) \quad T(s_3) = \frac{Q_z t}{h^2 \left(b + \frac{t}{6}\right)} (b - s_3)$$

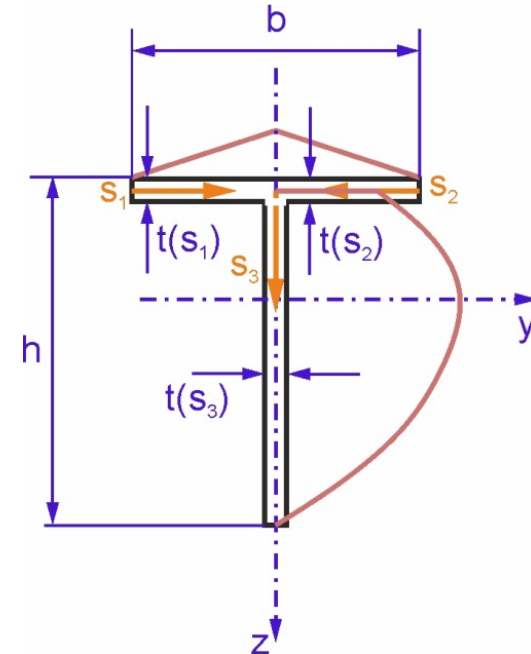
Die Berechnung der Schubflüsse wird im Detail in den Übungen gezeigt.

## Beispiel: T-Profil

Man beachte, dass vor der eigentlichen Berechnung zunächst der Schwerpunkt bestimmt werden muss, denn er bildet voraussetzungsgemäß den Ursprung des Koordinatensystems.

$$T(s_1 = 0) = T(s_2 = 0) = 0$$

$$T(s_3 = 0) = T\left(s_1 = \frac{b}{2}\right) + T\left(s_2 = \frac{b}{2}\right)$$



Die weitere Berechnung zeigt, dass der extremale Schubfluss auf Höhe des Schwerpunkts auftritt, also dort, wo die y-Achse das Profil schneidet.

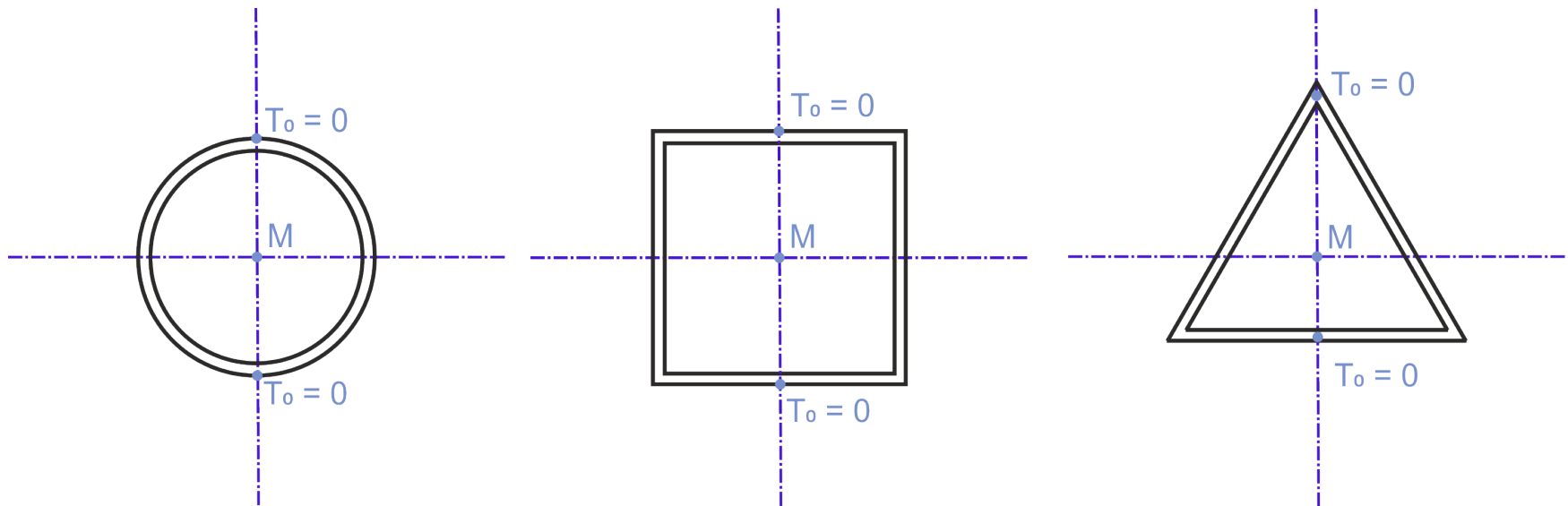
Diese Aussage gilt ganz generell, denn:

$$\frac{dT(s)}{ds} = -\frac{Q_z}{J_y} z(s)t(s) \equiv 0 \Rightarrow z(s) = 0$$



## 14.1.2 Geschlossene Profile

Bei Profilen, die symmetrisch zur z-Achse sind, lassen sich Punkte identifizieren, in denen der Schubfluss aus Symmetriegründen verschwinden muss, siehe nachfolgende Beispiele. Es ist sinnvoll, dorthin den Startpunkt des Integrationspfades  $s$  zu legen.

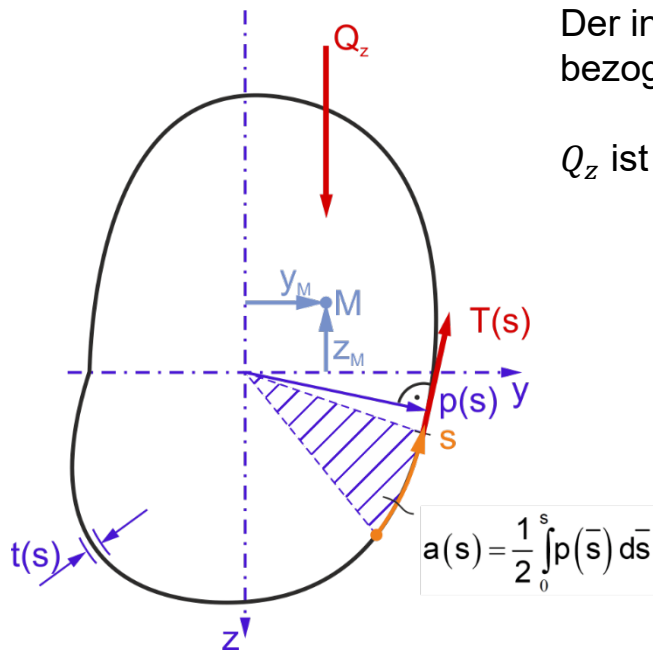


Für allgemeine, nicht-symmetrische geschlossene Profile sei auf den Appendix verwiesen.

## 14.2 Schubmittelpunkt

In die bisherige Berechnung des Schubflusses ging die Position der Querkraft offensichtlich nicht ein. Intuitiv ist aber klar, dass eine stark exzentrisch angreifende Querkraft eine zusätzliche Torsion des Querschnitts erzeugen wird. Die Frage stellt sich nun, wo denn  $Q_z$  liegen muss, um tatsächlich der dargestellten  $\tau$ -Verteilung äquivalent zu sein?

Mit anderen Worten: Durch welchen Punkt muss die Wirkungslinie der Querkraft gehen, um keine zusätzliche Torsion des Profils hervorzurufen?



Der infinitesimale Momentenbeitrag des Schubflusses  $T(s)$  bezogen auf den Koordinatenursprung ist laut Skizze  $T(s)p(s)ds$ .

$Q_z$  ist also dann der Schubflussverteilung äquivalent, wenn:

$$Q_z y_M = \oint T(s) p(s) ds$$

Zur Erinnerung:

$$T(s) = T_0 - \frac{Q_z}{J_y} S_y(s)$$

$$S_y(s) = \int z(s) t(s) ds = \int z(s) dA$$

Also:

$$\oint T(s)p(s)ds = \underbrace{\oint T_0p(s)ds}_{2a(L)T_0} - \frac{Q_z}{J_y} \oint p(s)S_y(s)ds$$

Partielle Integration des 2. Terms liefert

$$\int_0^L p(s) S_y(s) ds = \underbrace{2a(s) S_y(s)}_{= 0, \text{ weil } S_y(s=0) = S_y(s=L) = 0} \Big|_0^L - 2 \int_0^L z(s)t(s) a(s) ds$$

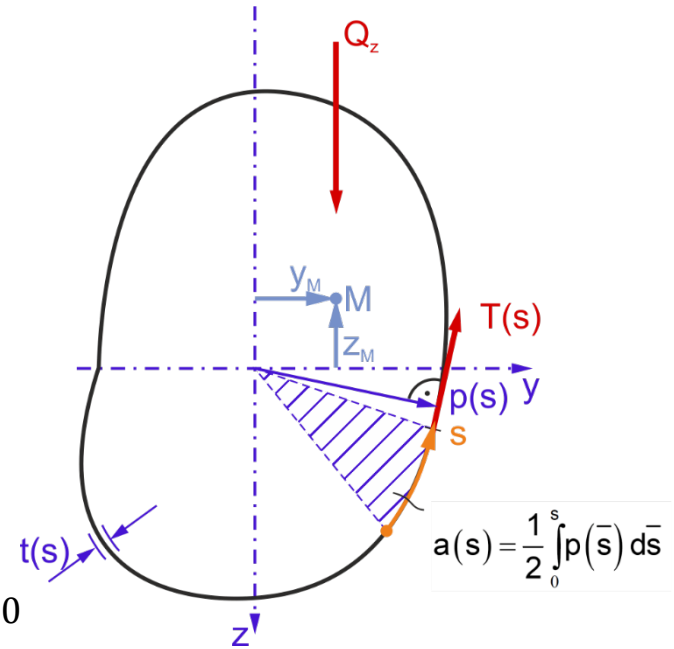
$$Q_z y_M = 2a(L)T_0 + 2 \frac{Q_z}{J_y} \int_0^L z(s)t(s)a(s) ds$$

Bei dünnwandigen, offenen Profilen ist  $T_0 = 0$ , somit

$$y_M = \frac{2}{J_y} \oint z(s)t(s)a(s) ds$$

Analog:

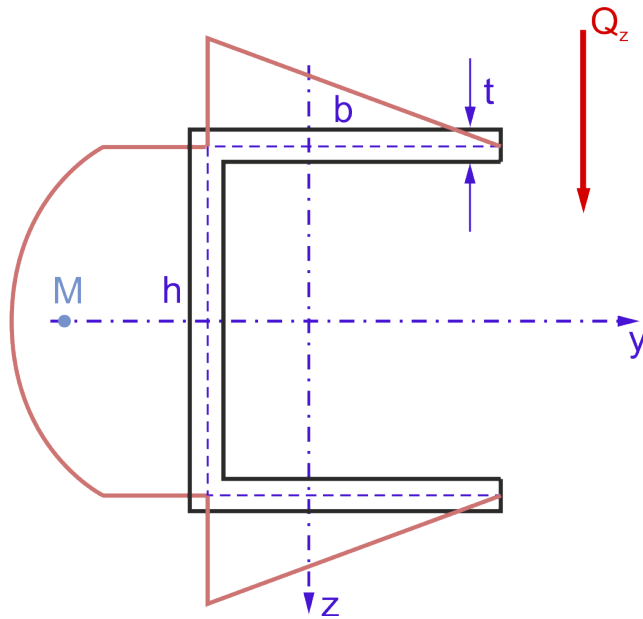
$$z_M = -\frac{2}{J_z} \oint y(s)t(s)a(s) ds$$



$L \dots$  Umfang

Der Schubmittelpunkt ist jener Punkt, indem eine Querkraft angreifen muss, damit es zu keiner Verdrehung des Querschnitts kommt!

**Beispiel:** C-Profil

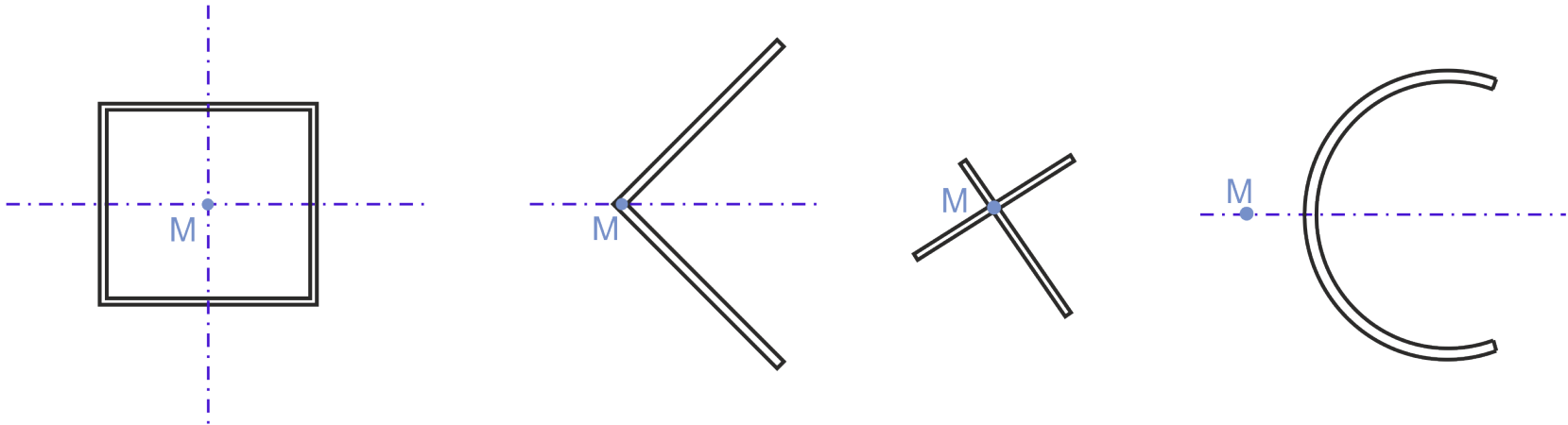


M ... Schubmittelpunkt

Beim C-Profil liegt der Schubmittelpunkt auf der dem Schwerpunkt gegenüberliegenden Seite des Stegs.

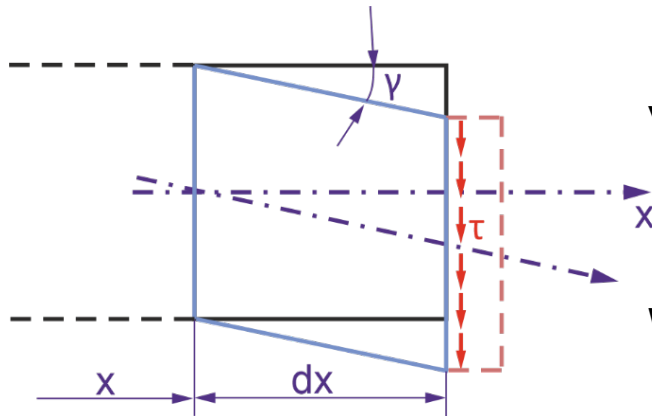
Der Schubmittelpunkt ist eine geometrische Eigenschaft (wie der Flächenschwerpunkt) und hängt somit nicht von der Belastung ab!

## 14.2.1 Regeln zur Bestimmung der Position des Schubmittelpunktes



- Bei einfach symmetrischen Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt auf der Symmetrieachse.
- Bei doppelt symmetrischen Querschnitten fällt der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammen.

## 14.3 Einfluss der Querkraft auf die Biegung



Vereinfachende Annahme:  $\tau(z) = \text{const.}$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{dw_Q}{dx}$$

Wobei  $w_Q$  die Verschiebung zufolge der Querkraft ist

Bei gleichmäßiger Verteilung der Schubspannungen gilt:

$$\tau = \frac{Q_Z(x)}{A}$$

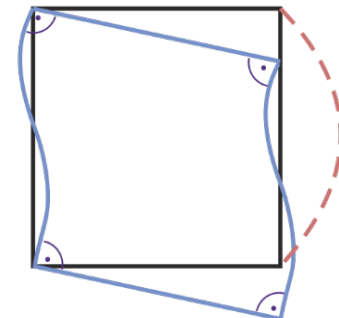
$$\frac{dw_Q}{dx} = \frac{Q_Z(x)}{GA}$$

In Wirklichkeit sind die Schubspannungen nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, die Querschnitte verwöben sich.

$$\frac{dw_Q}{dx} = \kappa \frac{Q_Z(x)}{GA}$$

Verschiebungslinie  
zufolge Querkraftschub

$\kappa$ ...Korrekturfaktor



Der Korrekturfaktor  $\kappa$  folgt aus der Forderung, dass die Schubspannungen und die ihnen äquivalente Querkraft die gleiche Arbeit leisten müssen.

$$\frac{1}{2} Q_Z dw_Q = \frac{1}{2} \int_0^h \underbrace{\tau(s)t(s)ds}_{dA} \gamma(s) dx \quad \rightarrow \quad \frac{\tau}{G}$$

$$Q_Z \frac{dw_Q}{dx} = \frac{1}{G} \int_0^h \tau^2(s)t(s)ds$$

Für  $T_0 = 0$  folgt:

$$\tau(s) = \frac{T(s)}{t(s)} = \frac{T_0}{t(s)} - \frac{Q_Z S_y(s)}{J_y t(s)}$$

$$\frac{dw_Q}{dx} = \frac{Q_Z}{G J_y^2} \int_0^h \frac{S_y(s)^2}{t(s)} ds$$

Der Vergleich mit der DGL eine Seite zuvor liefert:

$$\kappa = \frac{A}{J_y^2} \int_0^h \frac{S_y(s)^2}{t(s)} ds$$

Der Korrekturfaktor ist nur von der Geometrie abhängig!

Rechteck:  $\kappa = \frac{6}{5}$

Kreis:  $\kappa = \frac{10}{9}$

**Beispiel:** Verformung zufolge Querkraftschub

Geg.  $l, P, EJ_y, GA$

Ges.  $w_Q(x); \frac{w_{Qmax}}{w_{Mmax}}$

Bereich 1:  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$Q_z(x) = \frac{P}{2}$$

$$\frac{dw_Q}{dx} = \kappa \frac{Q_z(x)}{GA} = \kappa \frac{P}{2GA}$$

$$w_Q(x) = \kappa \frac{P}{2GA} x + C \quad RB: w_Q(x=0) = 0$$

$$w_Q(x) = \kappa \frac{P}{2GA} x$$

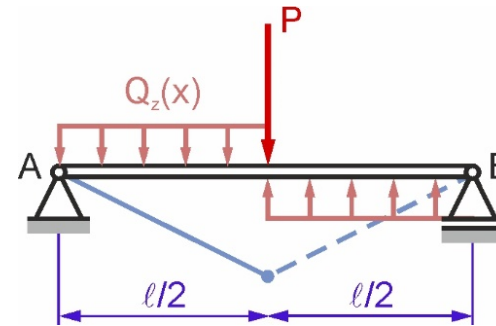
Biegelinie zufolge Querkraft ist stückweise linear!

$$w_{Qmax} = \kappa \frac{Pl}{4GA}$$

$$\frac{w_{Qmax}}{w_{Mmax}} = \frac{12\kappa EJ_y}{l^2 GA}$$

Für Rechteckquerschnitt:

$$\frac{w_{Qmax}}{w_{Mmax}} = \frac{12}{5} (1 + \nu) \left(\frac{h}{l}\right)^2$$



Zur Erinnerung:

$$w_{Mmax} = \frac{Pl^3}{48EJ_y}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Für Kreisquerschnitt:

$$\frac{w_{Qmax}}{w_{Mmax}} = \frac{5}{3} (1 + \nu) \left(\frac{d}{l}\right)^2$$



**Beispiel:** Schubkorrekturfaktor für Rechteckquerschnitt

Geg.:  $b, h$

Ges.:  $\kappa$

$$A = bh \quad t = b$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \quad S_y = bs \left( -\frac{h}{2} + \frac{s}{2} \right) = \frac{1}{2}b(-sh + s^2)$$

$$\kappa = \frac{A}{J_y^2} \int_0^h \frac{S_y(s)^2}{t(s)} ds$$

$$\kappa = \frac{144bh}{b^2h^6} \int_0^h \frac{1}{4b} b^2 (s^4 - 2s^3h + h^2s^2) ds$$

$$\kappa = \frac{36}{h^5} \int_0^h (s^4 - 2s^3h + h^2s^2) ds$$

$$\kappa = \frac{36}{h^5} \left[ \frac{s^5}{5} - \frac{hs^4}{2} + \frac{h^2s^3}{3} \right]_0^h$$

$$\kappa = \frac{36}{h^5} \frac{h^5}{30} = \frac{6}{5}$$

